ahol $n_{\text{alkatrész}}$ az alkatrészek száma, $q=n_{\text{kezelô}}$ az operátoroké, $p=n_{\text{ism}}$ az ismétléseké; $\bar{x}_{ij}$ az i-edik alkatrészre a j-edik operátor méréseinek átlaga.

A reprodukálhatóságnak két komponense van, a kezelő és a kezelő-alkatrész kölcsönhatás. A 8-5. táblázat $E\left(s^2\right)$ oszlopából kiolvashatjuk, hogy:

$$\hat{\sigma}^2_{\text{kezelô}} = \frac{MS_{\text{kezelô}} - MS_{\text{kezelô*alkatrész}}}{r \cdot p},$$

$$\hat{\sigma}^2_{\text{alkatrész•kezelô}} = \frac{MS_{\text{alkatrész•kezelô}} - MS_{\text{error}}}{p},$$

ahol

$$MS_{\text{kezelô}} = \frac{SS_{\text{kezelô}}}{\nu_{\text{kezelô}}} = \frac{rp\sum_{j}^{q}\left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)^2}{q-1},$$

$$MS_{\text{alkatrész•kezelô}} = \frac{SS_{\text{alkatrész*kezelô}}}{\nu_{\text{alkatrész*kezelô}}} = \frac{p\sum_{i}^{r}\sum_{j}^{q}\left(\bar{x}_{ij} - \bar{x}\right)^2}{(r-1)(q-1)}.$$

$\bar{x}_{ij}$ a j-edik kezelő i-edik alkatrészre kapott eredményeinek átlaga; $\bar{x}_j$ a j-edik kezelő összes eredményeinek átlaga, $\bar{x}$ az összes mérések átlaga.

Az alkatrészek varianciájának becslése:

$$\hat{\sigma}^2_{\text{alkatrész}} = \frac{MS_{\text{alkatrész}} - MS_{\text{alkatrész*kezelô}}}{q \cdot p},$$

ahol

$$MS_{\text{alkatrész}} = \frac{SS_{\text{alkatrész}}}{\nu_{\text{alkatrész}}} = \frac{\sum_{i}^{r}\left(\bar{x}_i - \bar{x}\right)^2}{r-1}.$$

A további számítások azonosak a terjedelem-módszer alkalmazásakor végzettekkel.

8-5. táblázat

az eltérés forrása	eltérés-négyzetösszeg	ν	s^2 (*MS*)	$E\left(s^2\right)$	F
A hatása	$S_A = qp\sum_i \left(\bar{x}_i - \bar{x}\right)^2$	*r*-1	$s_A^2 = \dfrac{S_A}{r-1}$	$qp\sigma_A^2 + p\sigma_{AB}^2 + \sigma^2$	s_A^2 / s_{AO}^2
O hatása	$S_O = rp\sum_j \left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)^2$	*q*-1	$s_O^2 = \dfrac{S_O}{q-1}$	$pr\sigma_O^2 + p\sigma_{AO}^2 + \sigma^2$	s_O^2 / s_{AO}^2
AO kölcsönhatás	$S_{AO} = p\sum_i \sum_j \left(\bar{x}_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{x}\right)^2$	(*r*-1)(*q*-1)	$s_{AO}^2 = \dfrac{S_{AO}}{(r-1)(q-1)}$	$p\sigma_{AO}^2 + \sigma^2$	s_{AO}^2 / s_R^2
Ismétlések	$S_R = \sum_i \sum_j \sum_k \left(x_{ijk} - \bar{x}_{ij}\right)^2$	*rq*(*p*-1)	$s_R^2 = \dfrac{S_R}{rq(p-1)}$	σ^2	
Teljes	$S_0 = \sum_i \sum_j \sum_k \left(x_{ijk} - \bar{x}\right)^2$	*rqp*-1			

8-3. példa

Végezzük el az ismételhetôségi-reprodukálhatósági elemzést a 8-1. példa adataira az ANOVA-módszerrel!
A számításokhoz szükséges átlag- és szórás-adatokat a 8-6. táblázatban készítettük elő.

8-6. táblázat

minta	kezelô						átlag
	Kiss Rózsa		Nagy Judit		Kovács Edit		
	átlag	szórás	átlag	szórás	átlag	szórás	
1	33.93	0.058	33.70	0.100	33.53	0.289	33.722
2	34.23	0.058	34.30	0.100	34.50	0.200	34.344
3	33.70	0.265	34.10	0.173	33.80	0.100	33.867
4	34.87	0.153	34.57	0.208	34.37	0.153	34.600
5	32.67	0.208	33.03	0.252	32.87	0.153	32.856
6	32.87	0.289	32.80	0.200	32.90	0.265	32.856
7	35.00	0.200	35.03	0.153	34.93	0.153	34.989
8	33.47	0.289	33.37	0.058	33.37	0.231	33.400
9	33.73	0.153	33.50	0.100	33.43	0.252	33.556
10	33.50	0.100	33.53	0.153	33.40	0.200	33.478
átlag	33.797		33.793		33.710		33.7667

A varianciaanalízis táblázata a 8-7. táblázat

8-7. táblázat

az ingadozás forrása	eltérés-négyzet-összeg (SS)	ν	közepes négyzet-öszszeg (MS)	F	p	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\sigma}$
ismétlés (error)	2.14000	60	0.035667			0.035667	0.188856
kezelők	0.14467	2	0.072333			0.000033	0.005738
kezelő* alkatrész	1.28422	18	0.071346	2.000	0.0237	0.011893	0.109055
alkatrészek (minták)	40.11111	9	4.456790			0.487272	0.698048
összesen	43.68000	89					

Az *F* és *p* oszlopban adott értékek azt mutatják, hogy a kezelők és az alkatrészek közötti kölcsönhatás nem hanyagolható el (a véletlen p=0.027 valószínűséggel ad 2.0 vagy annál nagyobb $F = s_{AO}^2 / s_R^2$ próbastatisztika-értéket).

Az ismétlések varianciájának becslése:

$$\hat{\sigma}^2_{\text{ism}} = s^2_{\text{error}} = MS_{\text{error}} =$$
$$= 2 \cdot \left(0.058^2 + 0.058^2 + \cdots + 0.1^2 + 0.1^2 + \cdots + 0.153^2 + 0.289^2 + \cdots + 0.2^2\right) / 60 =$$
$$= 0.035667\,,$$

mivel minden minta*kezelő kombinációban végzett 3 ismételt mérés szórásnégyzetének szabadsági fokszáma 2.

A reprodukálhatóság varianciájának becslése:

$$MS_{\text{kezelô}} = SS_{\text{kezelô}} / \nu_{\text{kezelô}} =$$
$$= 10 \cdot 3 \cdot \left[(33.797 - 33.7667)^2 + (33.793 - 33.7667)^2 + (33.710 - 33.7667)^2\right] / 2 =$$
$$= 0.07233\,.$$

A reprodukálhatóság varianciája a kezelő és a kezelő*alkatrész kölcsönhatás varianciájának összege. Kétfelé választható:

$$\hat{\sigma}^2_{\text{kezelô}} = \frac{MS_{\text{kezelô}} - MS_{\text{kezelô*alkatrész}}}{r \cdot p} = \frac{0.07233 - 0.71346}{10 \cdot 3} = 0.000033\,,$$

$$\hat{\sigma}^2_{\text{alkatrész*kezelô}} = \frac{MS_{\text{alkatrész*kezelô}} - MS_{\text{error}}}{p} = \frac{0.071346 - 0.035667}{3} = 0.011893\,,$$

$$MS_{\text{alkatrész}} = SS_{\text{alkatrész}} / \nu_{\text{alkatrész}} =$$
$$= 3 \cdot 3 \cdot \left[(33.722 - 33.7667)^2 + (34.344 - 33.7667)^2 + \cdots + (33.478 - 33.7667)^2\right] / 9 =$$
$$= 4.45679\,,$$

$$\hat{\sigma}^2_{\text{alkatrész}} = \frac{MS_{\text{alkatrész}} - MS_{\text{alkatrész*kezelô}}}{q \cdot p} = \frac{4.45679 - 0.071346}{3 \cdot 3} = 0.487272\,.$$

A variancia-összetevők százalékos összehasonlítását mutatja a 8-8. táblázat.

8-8. táblázat

ingadozás forrása	$\hat{\sigma}^2$	$\hat{\sigma}$	σ 90 %-os alsó hat.	konf.int. fölső hat.	% R&R-ben	% a teljes ing.-ban
(1) ismétlés	0.03567	0.1889	0.1645	0.2226	74.94	6.67
(2) kezelő	0.00003	0.0057	0.0000	0.2109	0.07	0.006
(3) kezelő* alkatrész	0.01189	0.1091	0.0385	0.1899	24.99	2.22
reprodukál-hatóság (2+3)	0.01193	0.3453			25.06	2.23
R & R (1+2+3)	0.04759	0.2182	0.2144	0.3036	100.00	8.90
(4) alkatrészek között	0.48727	0.6980	0.4401	1.2074		91.10
teljes (1+2+3+4)	0.53486	0.7313				100.00

Az első számoszlopban vannak a föntebb kiszámított becslések a σ^2 varianciákra. A második számoszlop ezek négyzetgyökeit tartalmazza.

A harmadik és negyedik számoszlop a konfidenciaintervallum a második oszlopban megadott becsült szórásokra (négyzetgyök varianciákra), az ötödik oszlop a mérés varianciájának összetevôkre bontása, a hatodik a teljes (tehát a különbözô alkatrészek közötti különbségeket is tartalmazó) ingadozás varianciájának fölbontása, utóbbi kettő százalékban.

A 8-9. táblázat első számoszlopában megismételjük a 8-8. táblázatban adott $\hat{\sigma}$ értékeket, a második oszlopban az 5.15σ szélességű intervallumok láthatók, az utolsó sorban van a tűrésmezőnek a feladatban megadott szélessége.

8-9. táblázat

ingadozás forrása	$\hat{\sigma}$	az ingadozási tartomány szélessége ($5.15 \cdot \hat{\sigma}$)	a teljes ingadozás %-ában	a tűrésmező %-ában
ismételhetőség (mérőeszköz)	0.1889	0.9726	25.8232	32.4203
kezelő (operátor)	0.0057	0.0295	0.7845	0.9850
kezelő*alkatrész	0.1090	0.5616	14.9116	18.7211
reprodukálhatóság	0.3453	1.7785	47.2199	59.2834
R & R	0.2182	1.1235	29.8296	37.4503
alkatrészek	0.6980	3.5949	95.4473	119.8316
teljes ingadozás	0.7313	3.7664	100.0000	125.5474
tűrésmező		3.0000		100.00

A harmadik számoszlopban a folyamat teljes ingadozásához, a σ=0.7313-bôl 5.15-tel való szorzással kapott 3.7664-hez viszonyítjuk az egyes összetevők 99%-os ingadozási tartományát. Vegyük észre, hogy mivel az összegzés a varianciákra érvényes, az azok négyzetgyökével arányos konfidencia-intervallumokra nem, az összetevők intervallumainak összege nem egyezik meg a négyzetösszeg intervallumának négyzetgyökével, így az intervallumok összege 100% fölött van! Ugyanígy az ismételhetőség és a reprodukálhatóság konfidenciaintervallumának összege nem adja ki a mérés konfidencia-intervallumát. A negyedik oszlopban a tűrésmező szélességéhez viszonyítunk, azt véve 100%-nak.

Az eredmények azt mutatják, hogy a példában az ismételhetőség (tehát amikor ugyanazon személy ugyanazt az alkatrészt többször méri) nem kielégítő, ez adja

a mérési variancia 74.9%-át, tehát a mérőeszközön kell javítani. Az is látható, hogy az alkatrészek és a kezelők között jelentős kölcsönhatás van, ez adja a mérési variancia 25%-át, ezt a kölcsönhatást a terjedelemre alapozott kiértékelési módszerrel nem vennénk észre.
A mérési módszerrel a mérés bizonytalansága a tűrésmező szélességnek 34.2%-a.

Abban az esetben, ha nem vesszük figyelembe az alkatrészek és a kezelők közötti itt szignifikánsnak bizonyult kölcsönhatást, valamelyest különböző becsült varianciákat kapnánk, ill. más lenne az egyes eltérés-komponensek aránya, amint ezt a 8-10. és 8-11. táblázat mutatja. Az eltérés oka, hogy az elhanyagolt kölcsönhatás a hiba- (ismétlési) -varianciával egyesítődik a számolásnál. Ennek egyik következménye, hogy más lesz az ismétlés becsült varianciája, másik pedig az, hogy amikor a kezelők közötti különbség varianciáját meg akarjuk tisztítani az ismétlési hiba varianciájától, utóbbira más értéket használunk.

8-10. táblázat

ingadozás forrása	$\hat{\sigma}$	$\hat{\sigma}^2$	% R&R-ben	% a teljes ingadozásban
(1) ismételhetőség (mérőeszköz)	0.2095	0.04390	97.89	8.20
(2) reprodukálhatóság (kezelő)	0.0308	0.00095	2.11	0.18
R & R (1+2)	0.21177	0.04485	100.00	8.38
alkatrészek	0.70023	0.49032		91.62
teljes ingadozás (1+2+3)	0.73155	0.53517		100.00

8-11. táblázat

	$\hat{\sigma}$	az ingadozási tartomány szélessége ($5.15 \cdot \hat{\sigma}$)	a teljes ingadozás %-ában	a tűrésmező %-ában
ismételhetőség (mérőeszköz)	0.2095	1.0790	28.64	35.97
reprodukálhatóság (kezelő)	0.0308	0.1585	4.21	5.28
alkatrészek	0.70023	3.6062	95.72	120.21
R & R	0.21177	1.0906	28.95	36.35
teljes ingadozás	0.73155	3.7675	100.00	125.58
tűrésmező		3.0000		100.00

Az ismertetett számszerű vizsgálatokat hasznosan egészítik ki a számítógép-programok kínálta grafikus feldolgozások. A 8-2. ábra az operátorok szerint csoportosítva mutatja a mérési eredményeket minden alkatrészre. Jól szemlélteti az ismételt mérések eredményeinek különbözőségét is.