Ilyenkor a szórásnégyzeteket sem egyszerűen átlagolják, hanem a szabadsági fokok száma szerinti átlagolással egyesítik, még akkor is, ha ezután átlagos szórást számolnak belőle:

$$\overline{s^2} = \frac{\sum_i s_i^2 (n_i - 1)}{\sum_i (n_i - 1)}, \qquad \bar{s} = \sqrt{\frac{\sum_i s_i^2 (n_i - 1)}{\sum_i (n_i - 1)}}.$$

Ha egy folyamat nagyon stabil, elhatározhatják, hogy csökkentik n értékét, mert úgy is elegendő biztonságú az ellenőrzés, de kisebb a költség. Ekkor az $\bar{x}$ kártyánál a beavatkozási határok számítására az $\bar{\bar{x}} \pm A_2 \bar{R}$ képlet nem alkalmazható; az $\bar{\bar{x}} \pm \frac{3\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}$ képletben d_2-nél az előzetes adatfelvétel mintaelemszámát, n-re az ellenőrzés aktuális mintaelemszámát kell venni.

4.6. Megjegyzés a külső előírásokkal (adott μ és σ^2) készített ellenőrző kártyákhoz

Előfordul, hogy a kártyák paramétereit, vagyis a folyamat eloszlásának paramétereit nem előzetes adatfelvétellel határozzák meg, magából a folyamatból, hanem előírt, kívánt értékeiket adják meg. Ilyenkor az ellenőrző kártya akkor is eltérést mutathat, ha a folyamat stabil, mert nem a kívánt érték körül ingadozik. Márpedig műszakilag más a teendő, ha a folyamat statisztikailag kézbentartott (csak véletlen ingadozások vannak), de az ingadozás csökkentendő, mintha a folyamat nem stabil, veszélyes zavarok vannak. Az utóbbi esetben először e veszélyes hibák okát kell megkeresni, és a folyamatot stabilizálni.

A külső előírásokkal (adott μ és σ^2) készített ellenőrző kártyákkal nem tudjuk a kétféle esetet elkülöníteni, tehát a teendőket sem tudjuk megfelelően meghatározni, ezért az ilyen gyakorlat általában kerülendő. Kivételt képez az az eset, amikor az előírt értéktől való eltérés könnyen korrigálható a készülék állításával.

4.7. Útmutató az átlag-kártya használatához

4.7.1. Mikor használjunk átlag-kártyát (Pyzdek, 1990; p.121)

- ha a minta hasonló körülmények között vett több elemből állhat;
- ha nagy $\Delta \geq 2\sigma$ eltérések várhatók, és ezeket akarjuk észlelni;
- ha a kis eltérések nem járnak súlyos gazdasági következményekkel (nem kerülnek sokba), pl. a folyamat ingadozása lényegesen belül van az elôírt tűrési tartományon, a folyamat képessége nagyon jó, ezért nem fontos észrevennünk a kis eltéréseket;
- ha az eljárás egyszerűsége fontos szempont, de azért az alkalmazóknak nem okoz nehézséget az átlag kiszámítása;
- a mintavételi költség viszonylag kicsi.

4.7.2. Mikor ne használjunk átlag-kártyát

- ha nem lehet a mintákat csoportokba osztani;
- ha a csoportokon belüli ingadozás a csoportok közötti véletlen ingadozáshoz képest túl kicsi, ekkor ugyanis túl sok kiesô értéket találunk (ez a helyzet, ha a csoporton belüli eltérések csak a mérési hibából adódnak);
- ha a kimutatandó eltérés a $0.5\sigma < \Delta < 2\sigma$ tartományba esik;
- ha a mintavétel/mérés költséges, és többe kerülne, mint amit az ellenőrzéssel nyerhetnénk;
- a folyamat lényegénél fogva ciklikus vagy trend jellegű, ekkor ugyanis az egymás utáni minták nem függetlenek.

4.7.3. Az átlag-kártya előkészítésének és alkalmazásának lépései

1. A mérendő változó meghatározása: olyan jellemzőt választunk, ami a minőség szempontjából releváns (problémát okoz vagy okozhat); mérése ne kerüljön többe, mint annak a költsége, ha nem használunk statisztikai minőségszabályozást.
2. A mintaelemszám meghatározása: a mintán belüli változékonyság sokkal kisebb legyen, mint a minták közötti, 4-6 elemű mintát szokás venni, 5 tipikusnak nevezhető.
3. A folyamat eloszlása paramétereinek (μ és σ^2) előzetes becslése a mintaelemszám meghatározásához; n<10 esetén használhatunk terjedelem-kártyát.
4. Előzetes adatfelvétel a folyamat eloszlása paramétereinek (μ és σ^2) becslésére, ehhez megfelelő kártya-kombináció választása, 25 minta gyűjtendő.
5. Az adatok ábrázolása kártyákon, a középvonal és a beavatkozási határok kiszámítása; instabilitás vizsgálata, azok megtalálása után a megfelelő pontok elhagyandók. Ha nem gyűjtöttünk elegendő adatot, mérjünk tovább. Az elemzést célszerű számítógéppel végezni, ugyanis nem kötődik az üzemi helyszínhez, és többszöri újraszámolást, ábrázolást igényel.
6. Gyártásközi ellenőrzés akkor kezdődhet, ha az előzetes adatfelvétel során a folyamat stabilnak bizonyult. Az elemzést a szóródási jellemző (pl. terjedelem) kártyájával kell kezdeni, mert az átlag-kártya határai σ = konst esetre érvényesek. A kártyára minden kísérő információ földjegyzendő, az esetleges észlelések is, ezek segítségünkre lehetnek a veszélyes hibák okainak azonosításában. Ha kiesô érték van, először számolási vagy adatleírási hibára gyanakodjunk, annak kiszűrése a legolcsóbb. Abból is hasznos következtetésekhez jutunk, ha a variancia a vártnál kisebb.
7. A gyártásközi ellenőrzésnek a gyártással egy időben kell folynia, keveset ér, ha megtudjuk, hogy az előző napon valami történt.

4.8. Beavatkozási határok kijelölése a másodfajú hiba alapján ill. annak figyelembe vételével

A beavatkozási határokat a hagyományos alkalmazásoknál az elsőfajú hiba adott valószínűségéhez szokás megadni, a mintaelemszámot (a csoport elemszámát) többé-kevésbé önkényesen előre fölvéve. Ez azt jelenti, hogy a hamis riasztás valószínűségét rögzítik.
Nincs akadálya annak, hogy a másodfajú hiba adott valószínűségéhez számítsunk beavatkozási határokat (ún. elfogadási ellenőrző kártyák. Montgomery, 1991; p. 319). Ekkor annak valószínűségét korlátozzuk, hogy az esetleges eltolódás észrevétlen maradjon.

A β rögzítésével kiszámított beavatkozási határokat LCL^{β}-val és UCL^{β}-val fogjuk jelölni.
Legyen a nullhipotézis és az ellenhipotézis a következő:

$$H_0: \mu \le \mu_0$$

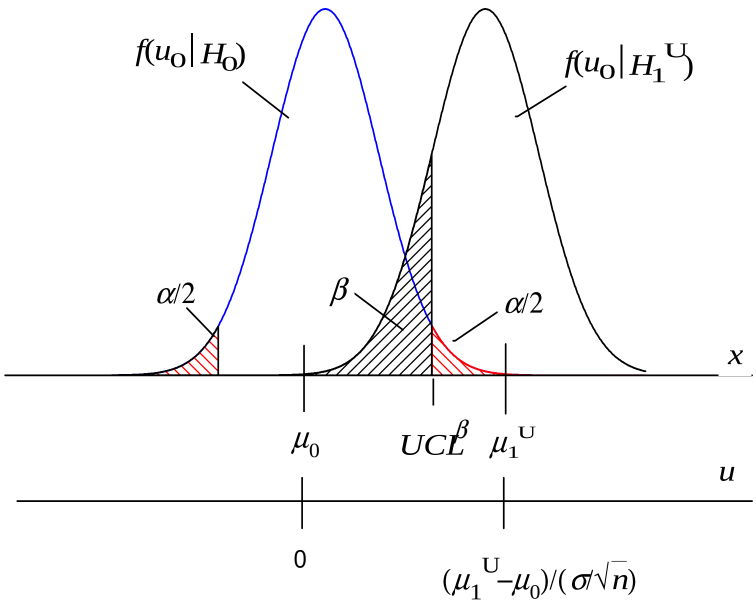
$$H_1^U: \mu > \mu_0$$

Legyen az a várható érték, amely μ-től lényegesen különbözik, és ezt a különbséget $1-\beta$ valószínűséggel ki akarjuk mutatni, μ_1^U .
A másodfajú hiba valószínűsége az átlag-kártyánál:

$$\beta = P\left(u_0 < u_\alpha \middle| H_1^U\right),$$

$$\beta = P\left(\frac{\bar{x}-\mu_1^U}{\sigma/\sqrt{n}} < -u_\beta \middle| H_1^U\right) = P\left(\bar{x} < \mu_1^U - u_\beta \sigma/\sqrt{n}\right),$$

vagyis a fölső beavatkozási határ: $UCL_{\bar{x}}^{\beta} = \mu_1^U - u_\beta \sigma/\sqrt{n}$.



4-6 ábra. Fölső beavatkozási határ a másodfajú hiba alapján

Hasonlóan, ha az ellenhipotézis másik oldali, és a már kimutatandóan eltérő várható érték μ_1^L:

$H_0: \mu \geq \mu_0$,

$H_1^L: \mu < \mu_0$,

$\beta = P\left(u_0 > -u_\alpha \middle| H_1^L\right)$,

$$\beta = P\left(\frac{\bar{x} - \mu_1^L}{\sigma / \sqrt{n}} > u_\beta \middle| H_1^L\right) = P\left(\bar{x} > \mu_1^L + u_\beta \sigma / \sqrt{n}\right).$$

Az alsó beavatkozási határ:

$$LCL_{\bar{x}}^{\beta} = \mu_1^L - u_\beta \sigma / \sqrt{n}.$$

4-9. példa

A 4-2. példa analógiájára számítsuk ki először a beavatkozási határokat a pörköltkávé-adagoló automata ellenőrzésére, a következő adatokból

μ_0=250; σ^2=1, α=0.0027 (±3σ konvenció), n=5.

Ezekkel:

$$UCL_{\bar{x}}^{\alpha} = \mu_0 + 3\sigma / \sqrt{n} = 250 + 3 \cdot 1 / \sqrt{5} = 251.34,$$

$$LCL_{\bar{x}}^{\alpha} = \mu_0 - 3\sigma / \sqrt{n} = 250 - 3 \cdot 1 / \sqrt{5} = 248.666.$$

Legyen itt β=0.1, $\mu_1^U = 252$; $\mu_1^L = 248$, vagyis az ingadozás centruma az ellenhipotézis szerint 2 egységgel tolódik el fölfelé vagy lefelé, és ezt 90% biztonsággal ki akarjuk mutatni.

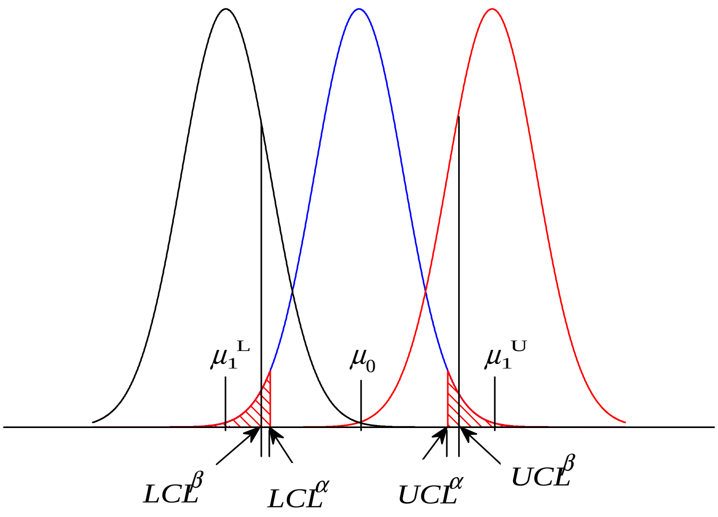
A függelék I. táblázatából $u_\beta = 1.28$.

A beavatkozási határok:

$$UCL_{\bar{x}}^{\beta} = \mu_1^U - u_\beta \sigma / \sqrt{n} = 252 - 1.28 \cdot 1 / \sqrt{5} = 251.43,$$

$$LCL_{\bar{x}}^{\beta} = \mu_1^L + u_\beta \sigma / \sqrt{n} = 248 + 1.28 \cdot 1 / \sqrt{5} = 248.57.$$

Látható, hogy a másodfajú hiba rögzítésével számolt beavatkozási határok a $\left(\mu_1^L, \mu_1^U\right)$ tartományon belül vannak (4-7. ábra).



4-7 ábra. Az első és másodfajú hiba valószínűségének hatása a beavatkozási határok értékére

Az első- és a másodfajú hiba megengedett valószínűsége meghatározta beavatkozási határok egymáshoz viszonyított helyzete adott mintaelemszámnál α és β viszonylagos nagyságától függ. Ha az α szignifikanciaszintet csökkentjük, a beavatkozási határok távolodnak μ_0-tól, ha β nagyságát csökkentjük, a beavatkozási határok a μ_1^L és μ_1^U irányából μ_0 felé mozdulnak, az ábrán láthatóhoz képest helyzetük föl is cserélődhet.

Látni fogjuk, hogy meghatározható egy olyan mintaelemszám, amelyre az adott α-hoz és β-hoz tartozó beavatkozási határok azonosak lesznek. Azt is kiszámíthatjuk, hogy az első- és másodfajú hiba megengedett valószínűsége (α és β) eléréséhez mekkora mintaelemszám és milyen beavatkozási határok tartoznak (v.ö. 2-13. példa).

$$UCL_{\bar{x}}^{\alpha} = UCL_{\bar{x}}^{\beta},$$

behelyettesítve

$$\mu_0 + u_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} = \mu_1^U - u_\beta \sigma/\sqrt{n}$$

$$n = \frac{\left(u_{\alpha/2} + u_\beta\right)^2 \sigma^2}{\left(\mu_1^U - \mu_0\right)^2}$$

4-10. példa

Legyen $\mu_1^U = 252$; $\mu_1^L = 248$; μ_0=250; σ^2=1,
α=0.0027 (±3σ konvenció), β=0.1

A függelék I. táblázatából $u_{\alpha/2} = 3$ és $u_\beta = 1.28$,

$$n = \frac{(3+1.28)^2 \cdot 1^2}{(252-250)^2} = 4.58,$$

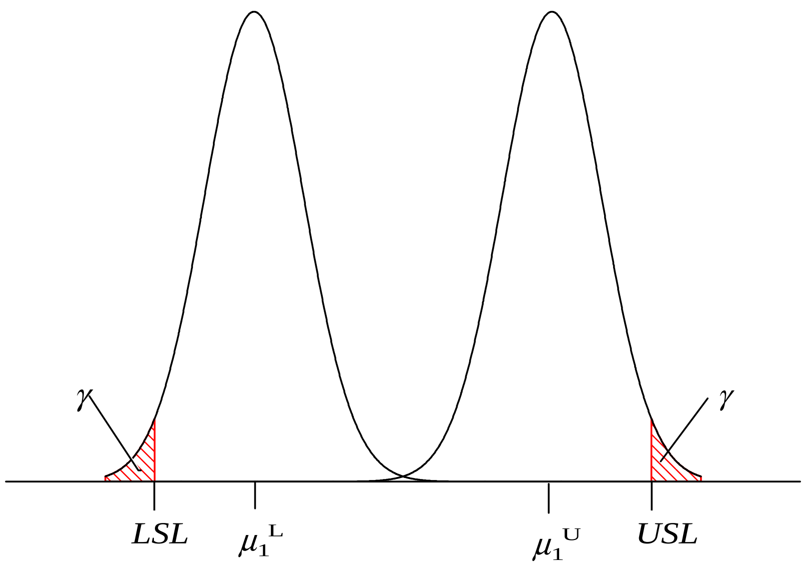
helyette vegyünk 5-öt.
Ekkor, mint a 4-9. példában,

$$UCL_{\bar{x}} = \mu_0 + 3\sigma/\sqrt{n} = 250 + 3 \cdot 1/\sqrt{5} = 251.34,$$

$$LCL_{\bar{x}} = \mu_0 - 3\sigma/\sqrt{n} = 250 - 3 \cdot 1/\sqrt{5} = 248.66.$$

és ezekhez a beavatkozási határokhoz a megadott α (0.0027) tartozik, mert a tényleges mintaelemszámokkal számítottuk őket, de β értéke 0.1-nél kicsivel kisebb, mert a számítottnál nagyobb (egész) mintaelemszámot voltunk kénytelenek venni.

Nem mindig tudjuk μ_1^U és μ_1^L értékét műszakilag értelmesen számszerűsíteni, sokszor szemléletesebb, jobban megfogható, hogy megadjuk a gyártott termékek azon hányadát, amelynek minőségi jellemzője az *LSL* alsó tűréshatár alatt vagy az *USL* fölső tűréshatár fölött lesz az ellenhipotézis érvényessége esetén. Jelölje ezt a részt γ (4-8. ábra).



4-8 ábra. A μ_1^L és μ_1^U meghatározása az alsó és fölső tűréshatáron kívül eső termékek hányada alapján

A γ valószínűség kifejezése a tűréshatárokkal:

$$LSL = \mu_1^L - u_\gamma \sigma,$$

$$USL = \mu_1^U + u_\gamma \sigma.$$

Vigyázat, nem $\sigma/\sqrt{n}$ van a képletekben, mert *LSL* és *USL* nem $\bar{x}$-ra, hanem az x egyedi értékre vonatkozó határok.

A μ_1^U és μ_1^L értékeket kifejezve és a beavatkozási határok képletébe behelyettesítve:

$$\mu_1^L = LSL + u_\gamma \sigma,$$

$$\mu_1^U = USL - u_\gamma \sigma,$$

$$UCL_{\bar{x}}^{\beta} = USL - \left(u_\gamma + u_\beta / \sqrt{n}\right)\sigma,$$

$$LCL_{\bar{x}}^{\beta} = LSL + \left(u_\gamma + u_\beta / \sqrt{n}\right)\sigma.$$

4-11. példa

A 4-9. példát folytatva legyen *USL*=254, *LSL*=246; a selejt előfordulásának megengedett valószínűsége egy-egy irányban γ=0.025; a függelék I. táblázatából $u_\gamma = 1.96$.

$$\mu_1^U = USL - u_\gamma \sigma = 254 - 1.96 \cdot 1 = 252.04$$

$$\mu_1^L = LSL + u_\gamma \sigma = 246 + 1.96 \cdot 1 = 247.96$$

$$UCL_{\bar{x}}^{\beta} = USL - \left(u_\gamma + u_\beta / \sqrt{n}\right) = 254 - \left(1.96 + 1.28 / \sqrt{5}\right) \cdot 1 = 251.47$$

$$LCL_{\bar{x}}^{\beta} = LSL + \left(u_\gamma + u_\beta / \sqrt{n}\right) = 246 + \left(1.96 + 1.28 / \sqrt{5}\right) \cdot 1 = 248.53$$

Itt is megválaszthatjuk úgy az n mintaelemszámot, hogy az első- és másodfajú hiba valószínűsége a megadott α és β legyen. Ehhez μ_1^U-ra és és μ_1^L-re a γ selejtaránnyal kifejezett összefüggéseket kell helyettesíteni:

$$\mu_1^L = LSL + u_\gamma \sigma,$$

$$\mu_1^U = USL - u_\gamma \sigma,$$

$$n=\frac{\left(u_{\alpha/2}+u_{\beta}\right)^{2}\sigma^{2}}{\left(USL-\mu_{0}+u_{\gamma}\sigma\right)^{2}}.$$

4-12. példa

Számítsuk ki a beavatkozási határokat és a szükséges mintaelemszámot úgy, hogy az első- és másodfajú hiba megengedett valószínűségét együttesen rögzítjük, mégpedig a 4-10. példa szerinti (α=0.0027, β=0.1) értékekben, az ellenhipotézis szerinti selejtarány pedig legyen mindkét irányban γ=0.025!

$$n=\frac{\left(u_{\alpha/2}+u_{\beta}\right)^{2}\sigma^{2}}{\left(USL-\mu_{0}+u_{\gamma}\sigma\right)^{2}}=\frac{(3+1.28)^{2}\cdot 1^{2}}{(254-250-1.96\cdot 1)^{2}}=4.40$$

$$UCL_{\bar{x}}=\mu_{0}+3\sigma/\sqrt{n}=250+3\cdot 1/\sqrt{5}=251.34$$

$$LCL_{\bar{x}}=\mu_{0}-3\sigma/\sqrt{n}=250-3\cdot 1/\sqrt{5}=248.66$$

Ezekkel a beavatkozási határokkal egyszerre elégítjük ki az első- és másodfajú hiba megengedett valószínűségére adott kívánalmat úgy, hogy az ellenhipotézishez tartozó γ selejtarányt rögzítjük.

4.9. Medián-kártya

Vannak esetek, amikor átlag-kártyát kellene használni, de a személyzetnek képzettség híján nehézséget okozna az átlag kiértékelése. Fölvetődhet ilyenkor, hogy a mért egyedi értékeket ábrázoljuk. Ekkor azonban nem használnánk ki, hogy többelemű mintával dolgozunk, és az ilyen kártya nem tehető érzékenyebbé a mintaelemszám növelésével. Ilyenkor célszerű a medián-kártya használata, bár a medián rosszabb statisztikai tulajdonságú, mint az átlag (varianciája az átlagénak π/2-szöröse, tehát nagyobb; és statisztikailag nem független a szórásnégyzettől).

A medián (tapasztalati medián, jele $\tilde{x}$) a nagyság szerint sorba rendezett mintaelemek közül a középső, vagyis amelyiknél ugyanannyi kisebb, mint nagyobb van.

Célszerű a mintaelemszámot páratlanra választani. Ha páros, a két középsőnek az átlagát vehetjük, bár ekkor már számolni kell, és elvész az egyszerűség előnye.

A kártya vonalai:

$$CL_{\tilde{x}}=\bar{\tilde{x}},$$