4.2. Az átlag-szórás-kártya (a variancia becslése a szórásból)

Amennyiben a σ^2 variancia becslésére a szórásnégyzetet vagy a szórást használjuk, a következőkből kell kiindulni. A korrigált tapasztalati szórásnégyzet, amelyet az *i*-edik mintára a következő képlet szerint számítunk ki, torzítatlan becslése a σ^2 varianciának:

$$s_i^2 = \sum_j \frac{\left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2}{n-1}.$$

Az ennek négyzetgyökeként kapott *s* szórás viszont már nem torzítatlan becslése a σ-nak, hanem normális eloszlású *x* adatok esetén

$$E(s) = c_4\sigma,$$

ahol c_4 a mintaelemszámtól függő konstans, értékei a függelék V. táblázatában találhatók.

Ha az $E(s)$ várható értéket a minták szórásainak átlagával becsüljük, az *x* normális eloszlású valószínűségi változóra vonatkozó σ becslése:

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4}, \quad \text{ahol} \quad \bar{s} = \frac{1}{m}\sum_i^m s_i \quad \text{(a minták szórásának átlaga).}$$

Az átlag-kártya (x-bar chart) szerkesztése

Az *elôzetes adatfelvétel* esetén a középsô vonal (*CL*) itt is a minták átlagainak átlaga.
A beavatkozási határok (σ-ra a a szórások átlagolásával kapott becslést helyettesítve):

$$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + u_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} + u_{\alpha/2}\frac{\bar{s}}{c_4\sqrt{n}},$$

$$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - u_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} - u_{\alpha/2}\frac{\bar{s}}{c_4\sqrt{n}}.$$

Ha a $\pm 3\sigma$ konvenciót követjük, $u_{\alpha/2} = 3$, és így

$$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + 3\frac{\bar{s}}{c_4\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} + A_3\bar{s},$$

$$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - 3\frac{\bar{s}}{c_4\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} - A_3\bar{s}.$$

Az A_3 értékek a függelék V. táblázatából vehetők.

Gyártásközi ellenőrzéshez a kártyát úgy készítjük el, hogy a középvonalat és a beavatkozási határokat az előzetes adatfelvételnél megállapított $\bar{\bar{x}}$ és $\bar{s}$ értékekkel szerkesztjük meg.

Ha *külső előírások alapján* dolgozunk, a középvonal az átlag helyett az előírt μ várható érték, a beavatkozási határokat a megadott σ-val számoljuk ki, ugyanúgy, mint az átlag-terjedelem kártyánál. Ha μ és σ közül csak az egyik adott, a másik helyett az előzetes adatfelvételkor kapott becsült értéket használjuk.

A szórás-kártya (s chart) szerkesztése

Előzetes adatfelvételnél a középső vonal az átlagos szórás:

$$CL_s = \bar{s}\,.$$

Levezették, hogy a normális eloszlású *x* adatok *s* szórásának varianciája

$$\sigma_s^2 = \sigma^2\left(1-c_4^2\right).$$

A beavatkozási határok a $\pm 3\sigma$ választás esetén:

$$UCL_s = \bar{s} + 3\hat{\sigma}_s = \bar{s} + 3\frac{\bar{s}}{c_4}\sqrt{1-c_4^2} = B_4\bar{s}\,,$$

$$LCL_s = \bar{s} - 3\hat{\sigma}_s = \bar{s} - 3\frac{\bar{s}}{c_4}\sqrt{1-c_4^2} = B_3\bar{s}\,.$$

Ha *LCL*-re negatív érték adódik, zérusra igazítjuk.

A B_3 és B_4 értékeket is a függelék V. táblázatából vehetjük. Látható a táblázatból, hogy n<6-ra a alsó határ mindig zérus, vagyis 6-nál kisebb mintaelemszámú mintákkal nem mutathatjuk ki, ha a variancia csökkent az előzetes adatfelvétel állapotához képest.

Gyártásközi ellenőrzéshez a kártyát úgy készítjük el, hogy a középvonalat és a beavatkozási határokat az előzetes adatfelvételnél megállapított $\bar{s}$ értékkel szerkesztjük meg.

Ha *külső előírások alapján* dolgozunk, a középvonalat és a beavatkozási határokat is a megadott σ-val számoljuk ki:

$$CL_s = c_4\sigma\,,$$

$$UCL_s = c_4\sigma + 3\sigma\sqrt{1-c_4}\,,$$

$$LCL_s = c_4\sigma - 3\sigma\sqrt{1-c_4}\,.$$

4-3. példa

Készítsünk átlag-szórás-kártyát a 4-1. példa adatainak előzetes adatfelvételként való felhasználásával!
A 4-1. táblázatból az átlagok átlaga 249.955, az átlagos szórás 0.9181.

Az átlag-kártya paraméterei:

$CL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} = 249.955$.

A függelék V. táblázatából n=5-höz A_3=1.427;

$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_3\bar{s} = 249.955 + 1.427 \cdot 0.9181 = 251.265$;

$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_3\bar{s} = 249.955 - 1.427 \cdot 0.9181 = 248.645$.

A függelék V. táblázatából n=5-höz c_4=0.940, így

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{s}}{c_4} = \frac{0.9181}{0.94} = 0.9767 .$$

A szórás-kártya paraméterei:

$CL_s = \bar{s} = 0.9181$,

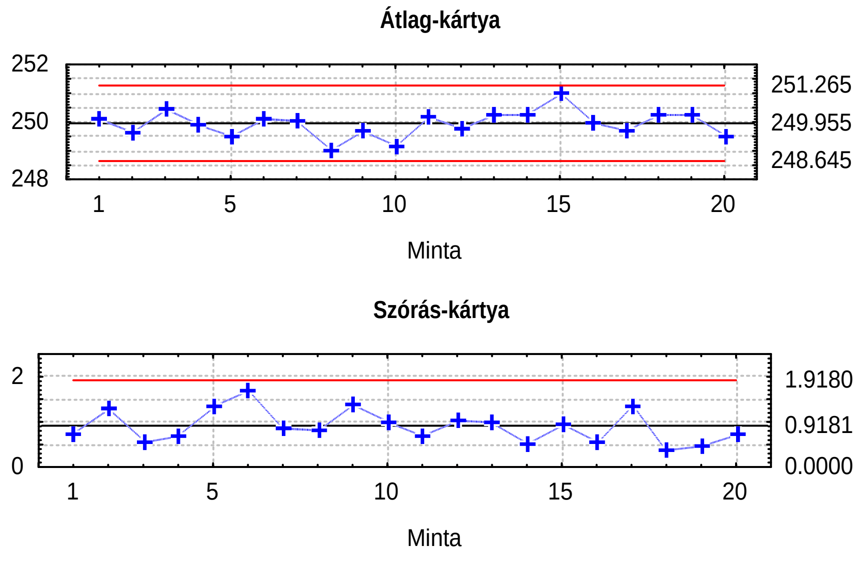
$$\hat{\sigma}_s = \hat{\sigma}\sqrt{1-c_4^2} = 0.9767 \cdot \sqrt{1-0.94^2} = 0.3332 .$$

A függelék V. táblázatából B_3=0, B_4=2.089;

$UCL_s = B_4\bar{s} = 2.089 \cdot 0.9181 = 1.918$;

$LCL_s = B_3\bar{s} = 0 \cdot 0.9181 = 0$.

Az átlag-szórás kártyakombinációt mutatja a 4-4. ábra.



4-4. ábra. Átlag-szórás-kártya a 4-3. példához, a STATISTICA programmal

4.3. Az átlag-szórásnégyzet-kártya (a variancia becslése a szórásnégyzettel)

A korrigált tapasztalati szórásnégyzet torzítatlan becslése a σ^2 varianciának. Eloszlása $\chi^2\sigma^2 / \nu$, ahol ν a szabadsági fokszám. Amennyiben a szórásnégyzetet a minták szórásnégyzeteinek egyesítésével számoljuk:

$$\overline{s^2} = \frac{\sum_i^m s_i^2}{m} = \frac{\sum_i^m \sum_j^n \left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2}{m(n-1)},$$

a szabadsági fokszám $m(n\text{-}1)$ lesz, mert m számú, egyenként n-1 szabadsági fokszámú szórásnégyzetet egyesítünk. Vegyük észre, hogy az egyesített szórásnégyzet (a szórásnégyzetek átlaga) nem azonos a szórások átlagának négyzetével, azaz $\overline{s^2} \neq \bar{s}^2$!

Az x normális eloszlású valószínűségi változóra vonatkozó σ becslése az így számolt $\overline{s^2}$ négyzetgyöke, tehát a szórás.

Az átlag-kártya(x-bar chart) szerkesztése

Az *elôzetes adatfelvétel* esetén a középsô vonal (*CL*) itt is a minták átlagainak átlaga.
Ha σ-ra a szórásnégyzetek egyesítésével kapott becslést helyettesítjük, a beavatkozási határok:

$$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + u_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} + u_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\overline{s^2}}}{\sqrt{n}},$$

$$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - u_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} - u_{\alpha/2}\frac{\sqrt{\overline{s^2}}}{\sqrt{n}}.$$

Megjegyezzük, hogy szigorúan véve a számításhoz az *u*-eloszlás helyett a *t*-eloszlás kritikus értékeit kellene használni, de nagy minták esetén (m·n>100) az eltérés nem túl jelentôs, a kérdésre a 4.4. pontban visszatérünk.

Ha a $\pm 3\sigma$ konvenciót követjük, $u_{\alpha/2} = 3$, és így

$$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + 3\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} + 3\frac{\sqrt{\overline{s^2}}}{\sqrt{n}},$$

$$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - 3\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} - 3\frac{\sqrt{\overline{s^2}}}{\sqrt{n}}.$$

Gyártásközi ellenőrzéshez a kártyát úgy készítjük el, hogy a középvonalat és a beavatkozási határokat az előzetes adatfelvételnél megállapított $\bar{\bar{x}}$ és $\overline{s^2}$ értékekkel szerkesztjük meg.

Ha *külső előírások* vannak, a középvonal az átlag helyett az előírt μ várható érték, a beavatkozási határokat a megadott σ-val számoljuk ki, ugyanúgy, mint az eddigi kártyáknál. Ha μ és σ közül csak az egyik adott, a másik helyett az előzetes adatfelvételkor kapott becsült értéket használjuk.

A szórásnégyzet-kártya (s^2 chart) szerkesztése

Előzetes adatfelvételnél a középső vonal maga a szórásnégyzet:

$$CL_{s^2} = \overline{s^2} .$$

A beavatkozási határok számításához felhasználjuk azt, hogy a szórásnégyzet $\chi^2\sigma^2 / \nu$ eloszlású, σ^2 becslése célszerűen az egyesített (átlagos) szórásnégyzet, ezzel:

$$UCL_{s^2} = \frac{\sigma^2\chi^2_{fölsô}}{\nu} = \frac{\overline{s^2}\chi^2_{fölsô}}{\nu},$$

$$LCL_{s^2} = \frac{\sigma^2\chi^2_{alsó}}{\nu} = \frac{\overline{s^2}\chi^2_{alsó}}{\nu} .$$

ahol $\chi^2_{fölsô}$ és $\chi^2_{alsó}$ a χ^2-eloszlás megfelelő elsőfajú hiba-valószínűséghez tartozó határai, értéküket a függelék II. táblázatából olvashatjuk ki.

Gyártásközi ellenőrzéshez a kártyát úgy készítjük el, hogy a középvonalat és a beavatkozási határokat az előzetes adatfelvételnél megállapított $\overline{s^2}$ értékkel szerkesztjük meg.

Ha *külső előírás* van a σ^2 varianciára, annak értéke lesz a középvonal, mert a szórásnégyzet várható értéke a variancia (torzítatlan becslés). A beavatkozási határokat is ezzel számoljuk ki.

4-4. példa

Készítsünk átlag-szórásnégyzet-kártyát a 4-1. példa adatainak előzetes adatfelvételként való felhasználásával!

A 3-1. táblázatból az átlagok átlaga 249.955, az egyesített (azonos mintaelemszám esetén egyben az átlagos) szórásnégyzet 0.9643. (Nem azonos az átlagos szórás értékének négyzetével, amely 0.8429.)

Az átlag-kártya paraméterei:

$$CL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} = 249.955,$$

$$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + 3\frac{\sqrt{\overline{s^2}}}{\sqrt{n}} = 249.955 + 3\frac{\sqrt{0.9643}}{\sqrt{5}} = 251.272 ,$$

$$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - 3\frac{\sqrt{\overline{s^2}}}{\sqrt{n}} = 249.955 - 3\frac{\sqrt{0.9643}}{\sqrt{5}} = 248.638,$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{0.9643} = 0.9820.$$

A szórásnégyzet-kártya paraméterei:

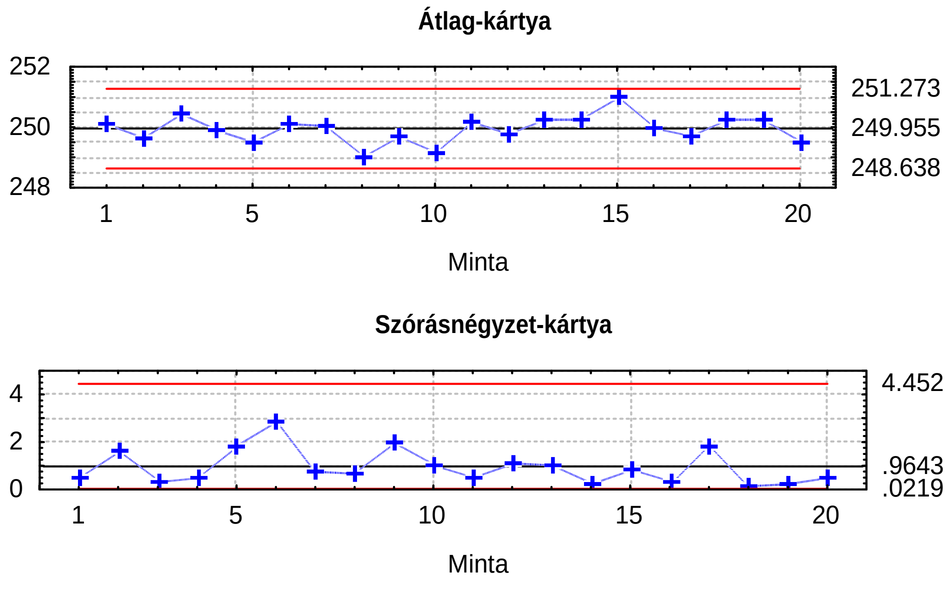
A 4-1. példa adataival, ha az elsőfajú hiba valószínűségére 0.002-t választunk, a függelék II. táblázatából $\chi^2_{0.001}(4) = 0.0908$; $\chi^2_{0.999}(4) = 18.47$; ezekkel:

$$CL_{s^2} = \overline{s^2} = 0.9643,$$

$$UCL_{s^2} = \frac{\overline{s^2}\chi^2_{0.999}}{\nu} = \frac{0.9643 \cdot 18.47}{4} = 4.452,$$

$$LCL_{s^2} = \frac{\overline{s^2}\chi^2_{0.001}}{\nu} = \frac{0.9643 \cdot 0.0908}{4} = 0.0219.$$

Az átlag-szórásnégyzet kártyakombinációt mutatja a 4-5. ábra.



4-5. ábra. Átlag-szórásnégyzet-kártya a 4-4. példához, a STATISTICA programmal

Az ismertetett kártyák szerkesztéséhez szükséges összefüggéseket mutatja a 4-2. áttekintő táblázat.

4-2. táblázat

A kártya típusa		
$\bar{x}-R$	$\bar{x}-s$	$\bar{x}-s^2$
$CL_{\bar{x}}=\bar{\bar{x}}$ $UCL_{\bar{x}}=\bar{\bar{x}}+\frac{3\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}=\bar{\bar{x}}+A_2\bar{R}$ $LCL_{\bar{x}}=\bar{\bar{x}}-\frac{3\bar{R}}{d_2\sqrt{n}}=\bar{\bar{x}}-A_2\bar{R}$ $CL_R=\bar{R}$ $UCL_R=\bar{R}+3\frac{d_3\bar{R}}{d_2}=D_4\bar{R}$ $LCL_R=\bar{R}-3\frac{d_3\bar{R}}{d_2}=D_3\bar{R}$	$CL_{\bar{x}}=\bar{\bar{x}}$ $UCL_{\bar{x}}=\bar{\bar{x}}+3\frac{\bar{s}}{c_4\sqrt{n}}=\bar{\bar{x}}+A_3\bar{s}$ $LCL_{\bar{x}}=\bar{\bar{x}}-3\frac{\bar{s}}{c_4\sqrt{n}}=\bar{\bar{x}}-A_3\bar{s}$ $CL_s=\bar{s}$ $UCL_s=\bar{s}+3\frac{\bar{s}}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}=B_4\bar{s}$ $LCL_s=\bar{s}-3\frac{\bar{s}}{c_4}\sqrt{1-c_4^2}=B_3\bar{s}$	$CL_{\bar{x}}=\bar{\bar{x}}$ $UCL_{\bar{x}}=\bar{\bar{x}}+3\frac{\sqrt{\overline{s^2}}}{\sqrt{n}}$ $LCL_{\bar{x}}=\bar{\bar{x}}-3\frac{\sqrt{\overline{s^2}}}{\sqrt{n}}$ $CL_{s^2}=\overline{s^2}$ $UCL_{s^2}=\frac{\overline{s^2}\chi^2_{fölsô}}{\nu}$ $LCL_{s^2}=\frac{\overline{s^2}\chi^2_{alsó}}{\nu}$

4.4. Megjegyzés a kártyák paramétereinek kiszámításakor alkalmazott közelítésekről[1]

A 3. fejezetben tisztáztuk, hogy az ellenőrző kártyákkal lényegében hipotézisvizsgálatot (statisztikai próbát) végzünk. A próba nullhipotézise, hogy a folyamat ingadozásának paraméterei megegyeznek-e azokkal, amelyeket az előzetes adatfelvétel során kaptunk. A méréses kártyáknál mindig kártya-párokkal dolgozunk, melyek egyik tagjával az ingadozás centrumára (a várható értékre), másik tagjával az ingadozás mértékére (a varianciára) vonatkozóan végzünk vizsgálatot.

A szokásos gondolkodásmód szerint az előzetes adatfelvétel során becsült paramétereket tekintjük a folyamat paramétereinek; és ezekre építjük a próbákat, melyeknek technikai megvalósításánál bizonyos feltételezéseket alkalmazunk. Az elkövetett hibák (elhanyagolások) akkor ítélhetők meg, ha a lépéseket külön-külön vesszük szemügyre.

Előre kell bocsátani, hogy még jól kijelölt határok esetén is, amikor a pontok elhelyezkedése alapján döntünk, a kártyán ábrázolt jellemző valószínűségi változó volta miatt is véthetünk első- vagy másodfajú hibát.

Az egyes kártya-párok megszerkesztésekor több, egymástól elkülönülő feladatot végzünk el:

- becslést adunk az átlag várható értékére, és ezzel a becsléssel helyettesítjük is a várható értéket (ez lesz az átlag-kártya középvonala)
- becslést adunk az x valószínűségi változó (a mért jellemző) varianciájára, és ezzel a becsléssel helyettesítjük is a varianciát, majd ebből kiszámítjuk az átlag varianciáját

[1] Ez az alfejezet anélkül átugorható, hogy a következő fejezetek megértését veszélyeztetné.