4. A méréses ellenőrző kártyák szerkesztése

A kártyákat háromféle módon alkalmazhatjuk.

Az *előzetes adatfelvétel* során a fő feladat az eloszlás paramétereinek (μ és σ^2) becslése a további ellenőrzésekhez. Minthogy a gyártásközi ellenőrzésnél éppen azt akarjuk vizsgálni, hogy a folyamat változatlanul stabil-e (csak véletlenszerű ingadozások vannak), először a fölvett folyamat stabilitásáról kell meggyőződnünk. Az eljárás az, hogy a becsült adatokból elkészítjük a kártyát, és ellenőrizzük a folyamatot. Ha nem stabil, megkeressük az okot. Ha sikerült azonosítani, a megfelelő mérési pontokat kihagyjuk, és újraszámoljuk a paramétereket, s.i.t. Itt tehát a fölvett adatsorból kell számolnunk a kártyán bejelölendő vonalak helyét és az ábrázolandó pontokat is.

A *gyártásközi ellenőrzésnél* az előzetes adatfelvétel során meghatározott paramétereket használjuk a kártya vonalainak kialakításához, tehát kész kártyát használunk. Az aktuális ellenőrzésnél folyamatosan fölvett adatok az ábrázolandó pontokat adják. Azt döntjük el a vizsgálatnál, hogy a folyamat azonos-e azzal a folyamattal, amelyet az előzetes adatfelvétellel rögzítettünk.

Kevésbé indokolt, de előfordul, hogy a gyártásközi ellenőrzésnél a kártya vonalait a *külső előírások alapján* határozzák meg, ekkor nem elsősorban a stabilitást, hanem legalább annyira a folyamat képességét vizsgálják. Az aktuális ellenőrzésnél fölvett adatok itt is csak az ábrázolandó pontokat adják, azokat a paraméterek (középvonal, beavatkozási határok) kiszámításához nem használják. A problémára visszatérünk.

Minthogy egy folyamat ellenőrzésénél az ingadozás centruma és mértéke egyaránt fontos, másképpen fogalmazva a normális eloszlás mindkét (μ és σ^2) paraméterét vizsgálni kívánjuk, a kártyákat páronként szokás használni, így beszélünk átlag-terjedelem, átlag-szórás, medián-terjedelem stb. kártyákról. Tehát kettős nullhipotézisünk van. Ráadásul az átlag-kártyával σ állandóságának feltételezésével végezzük a próbát. Ezért is ellenőriznünk kell, hogy σ állandó-e.

Az ingadozás centrumát vizsgáló kártyán, ha többelemű minta vehető, annak átlagát célszerű ábrázolni, kevésbé alkalmas a medián. A kártyák beavatkozási határainak számításához szükség van az x mért változó varianciájának becslésére. Három módszert szokás használni, a terjedelemből, a szórásból, vagy a szórásnégyzetből végzik el a becslést.

Az ingadozás mértékét vizsgáló kártyán a terjedelmet, a szórást, vagy a szórásnégyzetet ábrázolják, ha többelemű minták vehetők a folyamatból.

A következőkben a leggyakrabban használt kártyapárokra ismertetjük az egyes kártyák szerkesztéséhez szükséges képleteket. A számítások illusztrációjára a 4-1. példában szereplő adatokat fogjuk használni.

4-1. példa

Pörköltkávé-adagoló automata töltötte csomagokból félóránként (összesen 20-szor) 5-elemű mintát vettek, tömegüket megmérték. A 4-1.táblázatban adjuk meg a mérések eredményeit.

4-1. táblázat

i	mintaelem					átlag	medián	R	s	s^2
1	251.25	249.67	250.15	250.22	249.30	250.118	250.150	1.950	0.7353	0.5407
2	247.56	249.84	251.04	249.47	250.25	249.632	249.840	3.480	1.2968	1.6818
3	251.47	250.23	250.07	250.12	250.37	250.452	250.230	1.400	0.5806	0.3371
4	249.35	249.77	249.29	250.92	250.44	249.954	249.770	1.630	0,7087	0.5022
5	249.09	251.09	248.14	248.51	250.90	249.546	249.090	2.950	1.3671	1.8688
6	251.59	248.13	250.06	248.92	252.09	250.158	250.060	3.960	1.6910	2.8596
7	250.61	249.55	249.23	249.61	251.39	250.078	249.610	2.160	0.8974	0.8053
8	249.95	247.74	249.40	248.88	249.16	249.026	249.160	2.210	0.8196	0.6717
9	247.74	249.42	249.59	251.59	250.36	249.740	249.590	3.850	1.4082	1.9830
10	247.89	250.65	249.61	249.08	248.72	249.190	249.080	2.760	1.0285	1.0578
11	249.26	250.08	251.22	250.08	250.26	250.180	250.080	1.960	0.6990	0.4886
12	249.83	249.46	248.83	251.56	249.16	249.768	249.460	2.730	1.0676	1.1399
13	250.36	250.10	251.68	250.36	248.78	250.256	250.360	2.900	1.0311	1.0631
14	250.71	250.26	250.18	249.47	250.72	250.268	250.260	1.250	0.5110	0.2611
15	250.50	252.36	251.52	249.91	250.75	251.008	250.750	2.450	0.9514	0.9051
16	250.11	250.87	249.31	249.93	249.63	249.970	249.930	1.560	0.5879	0.3456
17	248.81	249.65	248.08	250.57	251.48	249.718	249.650	3.400	1.3549	1.8357
18	249.90	249.81	250.59	250.38	250.74	250.284	250.380	0.930	0.4132	0.1707
19	250.88	249.79	249.85	250.11	250.61	250.248	250.110	1.090	0.4790	0.2294
20	249.27	248.61	250.64	249.43	249.60	249.510	249.430	2.030	0.7347	0.5398
átlag						249.955	249.850	2.333	0.9181	0.9643

4.1. Az átlag-terjedelem kártya (a variancia becslése a terjedelemből)

A minta terjedelme (range)

$$R = |x_{\max} - x_{\min}|,$$

vagyis a mintán belüli legnagyobb és legkisebb érték közötti eltérés.

Ha n=2, a szórás és a terjedelem azonos. Amíg a mintaelemszám 10 alatt van, a terjedelem majdnem olyan hatásos becslése a varianciának, mint a szórásnégyzet. Minthogy az ellenőrző kártyákat elsősorban vizuális eszközként dolgozták ki, jóval a számítógépek (és a zsebszámológépek) megjelenése előtt, a klasszikus alkalmazásoknál egyértelműen a terjedelmet használták, mert az üzemi helyszínen ez volt könnyen kiszámítható. Ma ez nem egyértelműen indokolt.

Levezethető, hogy egy normális eloszlású valószínűségi változó terjedelmének várható értéke

$$E(R) = d_2 \sigma,$$

ahol d_2 a mintaelemszámtól függő konstans, értékei a függelék V. táblázatában találhatók. A képlet azt is mutatja, hogy a terjedelem nem torzítatlan becslés (csak d_2=1 esetén lenne az).

Ha az $E(R)$ várható értéket a minták terjedelmének átlagával becsüljük, az x normális eloszlású valószínűségi változóra vonatkozó σ becslése:

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2}, \text{ ahol } \overline{R} = \frac{1}{m}\sum_i R_i \; .$$

Az átlag–kártya (x-bar chart) szerkesztése

Az *elôzetes adatfelvétel* esetén a középsô vonal (CL) a minták átlagainak átlaga:

$$CL_{\bar{x}} = \overline{\overline{x}} = \frac{1}{m}\sum_i \overline{x}_i \quad (m \text{ a minták száma, } \overline{x}_i \text{ az i-edik minta átlaga}).$$

A beavatkozási határok (σ-ra a terjedelemből számított becslést helyettesítve):

$$UCL_{\bar{x}} = \overline{\overline{x}} + u_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \overline{\overline{x}} + u_{\alpha/2}\frac{\overline{R}}{d_2\sqrt{n}},$$

$$LCL_{\bar{x}} = \overline{\overline{x}} - u_{\alpha/2}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \overline{\overline{x}} - u_{\alpha/2}\frac{\overline{R}}{d_2\sqrt{n}}.$$

Ha a $\pm 3\sigma$ konvenciót követjük, $u_{\alpha/2} = 3$, és így

$$UCL_{\bar{x}} = \overline{\overline{x}} + \frac{3\overline{R}}{d_2\sqrt{n}} = \overline{\overline{x}} + A_2\overline{R},$$

$$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - \frac{3\bar{R}}{d_2\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R}\ ,$$

ahol A_2 értékei d_2-éibôl adott *n* mintaelemszámhoz könnyen kiszámíthatók, és szintén a függelék 3. táblázatában láthatók.

Gyártásközi ellenőrzéshez a kártyát úgy készítjük el, hogy a középvonalat és a beavatkozási határokat az előzetes adatfelvételnél megállapított $\bar{\bar{x}}$ é s $\bar{R}$ értékekkel szerkesztjük meg, így az ellenőrzést folyamatosan, már az első mintától kezdve végezhetjük.

Ha *külső előírások alapján* dolgozunk, a középvonal az átlag helyett az előírt μ várható érték, a beavatkozási határokat a megadott σ-val számoljuk ki:

$$UCL_{\bar{x}} = \mu + \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}\ .$$

Ha μ és σ közül csak az egyik adott, a másik helyett az előzetes adatfelvételkor kapott becsült értéket használjuk.

Szokás a beavatkozási határok mellett a kártyákon ún. figyelmeztető határokat (*UWL*: upper warning limit; *LWL*: lower warning limit) is megjelölni, ezek a $\pm 3\sigma$ helyett $\pm k\sigma$ értékhez tartoznak. A *k* értéke legtöbbször 2 vagy 1.5, ezeket a határokat a vizsgált jellemző előbb eléri, mint a beavatkozási határokat, így a vizsgálat érzékenyebb. Az is előfordul, hogy a másodfajú hiba valószínűségét csökkentendő, magukat a beavatkozási határokat is ezekhez a $\pm k\sigma$ értékekhez teszik. Ekkor ugyan β csökken, de az elsőfajú hiba α valószínűsége nő, aminek gyakoribb hamis riasztás a következménye.

A terjedelem-kártya (R chart) szerkesztése

Az *előzetes adatfelvétel* esetén a középső vonal (*CL*) a minták terjedelmének átlaga:

$$CL_R = \bar{R} = \frac{1}{m}\sum_i R_i\ .$$

A beavatkozási határok számításához szükség van az *R* terjedelem σ_R^2 varianciájának becslésére, kézenfekvő, hogy ezt is a terjedelemre alapozzuk. Az *R* terjedelem varianciájának négyzetgyöke az *x* minőségi jellemzőéből a következőképpen kapható meg:

$$\sigma_R = d_3\sigma\ ,$$

ahol d_3 a mintaelemszámtól függő konstans, értékei a függelék V. táblázatában találhatók. σ_R becslése:

$$\hat{\sigma}_R = d_3\hat{\sigma} = \frac{d_3\bar{R}}{d_2} = \frac{(D_4 - 1)\bar{R}}{3}\ .$$

A beavatkozási határok a $\pm 3\sigma$ választás esetén:

$$UCL_R = \overline{R} + 3\hat{\sigma}_R = \overline{R} + 3\frac{d_3\overline{R}}{d_2} = D_4\overline{R}\,,$$

$$LCL_R = \overline{R} - 3\hat{\sigma}_R = \overline{R} - 3\frac{d_3\overline{R}}{d_2} = D_3\overline{R}\,.$$

Ha az *LCL* alsó beavatkozási határra negatív érték adódik, zérusra igazítjuk. A D_3 és D_4 értékeket is a függelék V. táblázatából vehetjük. Látható a táblázatból, hogy n<7-re a alsó határ mindig zérus. Ez azért előnytelen, mert bármilyen terjedelem-adat az alsó határ fölött van, így nem vesszük észre, ha a variancia lecsökken.

A terjedelem-kártyánál is meg lehet adni a beavatkozási határokat a $\pm 3\sigma$ konvenció helyett az elsőfajú hiba megengedett α valószínűsége alapján, de ez nem nagyon szokás, a kérdésre a 4.4. pontban visszatérünk.

Gyártásközi ellenőrzéshez a kártyát úgy készítjük el, hogy a középvonalat és a beavatkozási határokat az előzetes adatfelvételnél megállapított $\overline{R}$ értékkel szerkesztjük meg.

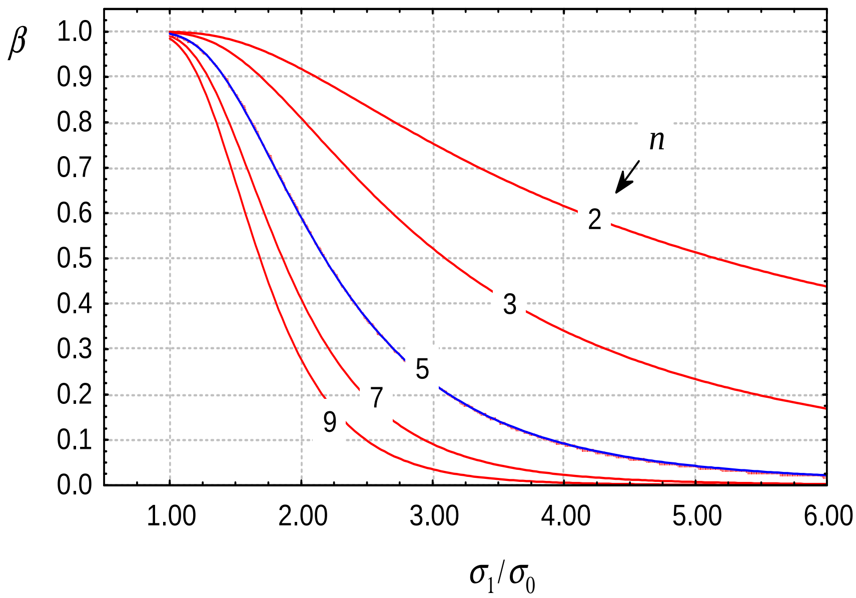
Ha *külső előírások alapján* dolgozunk, a középvonalat és a beavatkozási határokat is a megadott σ-val számoljuk ki:

$$CL_R = d_2\sigma\,,$$

$$UCL_R = d_2\sigma + 3d_3\sigma\,,$$

$$LCL_R = d_2\sigma - 3d_3\sigma\,.$$

A terjedelem-kártya működési jelleggörbéjét mutatja a 4-1. ábra.



4-1. ábra. A terjedelem-kártya működési jelleggörbéje, a STATISTICA programmal

Leolvashatjuk az ábráról, hogy amennyiben a variancia négyzetgyöke kétszeresére nő, ötelemű minták esetén 0.6 a valószínűsége, hogy ezt nem vesszük észre (a nullhipotézist fogadjuk el, amely szerint a variancia változatlan, tehát másodfajú hibát követünk el). A mintaelemszámot 9-re növelve e másodfajú hiba elkövetésének valószínűsége már csak 0.27. Azt is jól látjuk, hogy a nagyobb másodfajú hiba (tehát hogy σ nagyobb mértékű megváltozását ne vegyük észre) elkövetésének kockázata ugyanazon mintaelemszámnál kisebb.

Megjegyzendő, hogy az, ha a variancia a folyamatban lecsökken az előzetes adatfelvételhez képest, és emiatt a terjedelem az alsó beavatkozási határ alá csökken, csak a formális szóhasználatban "veszélyes hiba", ezért nem is kell beavatkozni, csak föl kell rá figyelni, hogy értékes tapasztalatként hasznosíthassuk. A minőségfejlesztési tevékenység során éppen az a leglényegesebb cél, hogy az ingadozás mértékét csökkentsük.

4-2. példa

Készítsünk átlag-terjedelem-kártyát a 4-1. példa adatainak előzetes adatfelvételként való felhasználásával!

A 3-1. táblázatból az átlagok átlaga 249.955, az átlagos terjedelem 2.333.

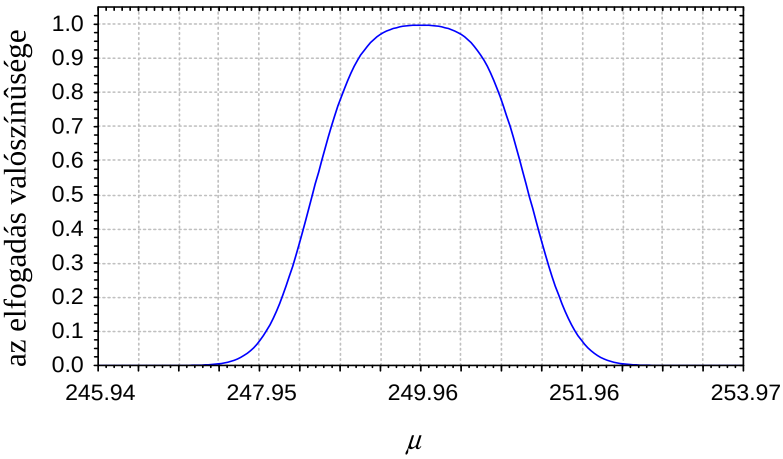
Az átlag-kártya paraméterei:

$$CL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} = 249.955$$

A függelék V. táblázatából n=5-höz A_2=0.577

$$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_2\bar{R} = 249.955 + 0.577 \cdot 2.333 = 251.301$$
$$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_2\bar{R} = 249.955 - 0.577 \cdot 2.333 = 248.609$$

A kapott átlag-kártya működési jelleggörbéje a 4-2. ábra.



4-2. Ábra. Az átlag-kártya működési jelleggörbéje a 4-2. példához, a STATISTICA programmal

Leolvasható az ábráról, hogy 1 g eltolódást 0.78 valószínűséggel nem veszünk észre (a nullhipotézis elfogadási valószínűsége 0.78), 2 g eltolódást már csak kb. 0.07 valószínűséggel néznénk el.

A terjedelem-kártya paraméterei:

$$CL_R = \overline{R} = 2.333\,.$$

A függelék V. táblázatából d_2 értéke 5 elemű minta esetén 2.326.

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2} = \frac{2.333}{2.326} = 1.003$$

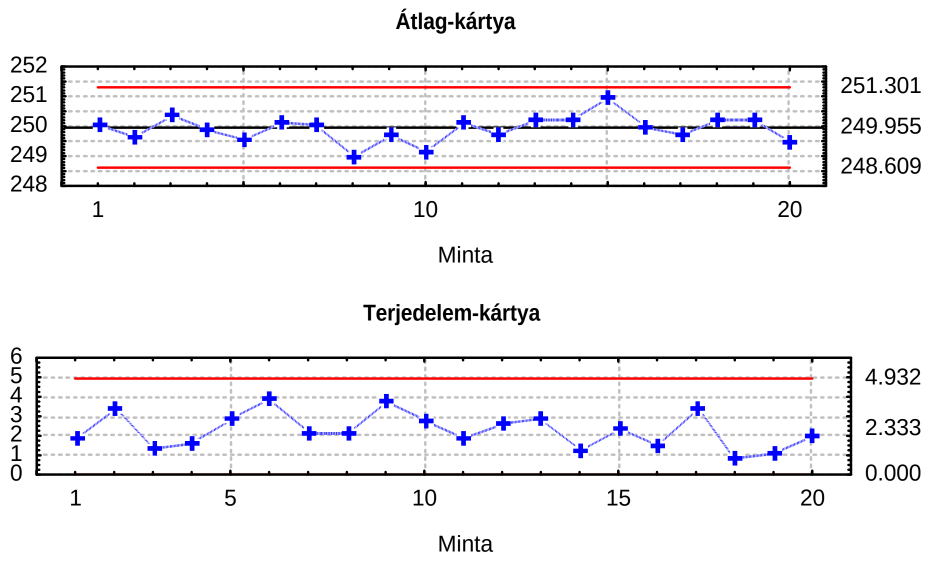
A függelék V. táblázatából D_3=0, D_4=2.114.

$$UCL_R = D_4\overline{R} = 2.114 \cdot 2.333 = 4.932$$

$$LCL_R = D_3\overline{R} = 0 \cdot 2.333 = 0$$

$$\hat{\sigma}_R = \frac{d_3}{d_2}\overline{R} = \left(\frac{D_4 - 1}{3}\right)\overline{R} = \left(\frac{2.114 - 1}{3}\right) \cdot 2.333 = 0.866$$

A terjedelem-kártya működési jelleggörbéje a 4-1. ábrán látható (az n=5-höz tartozó vonal). Az átlag-terjedelem kártyakombinációt mutatja a 4-4. ábra.



4-3. ábra. Átlag-terjedelem-kártya a 4-2. példához, a STATISTICA programmal