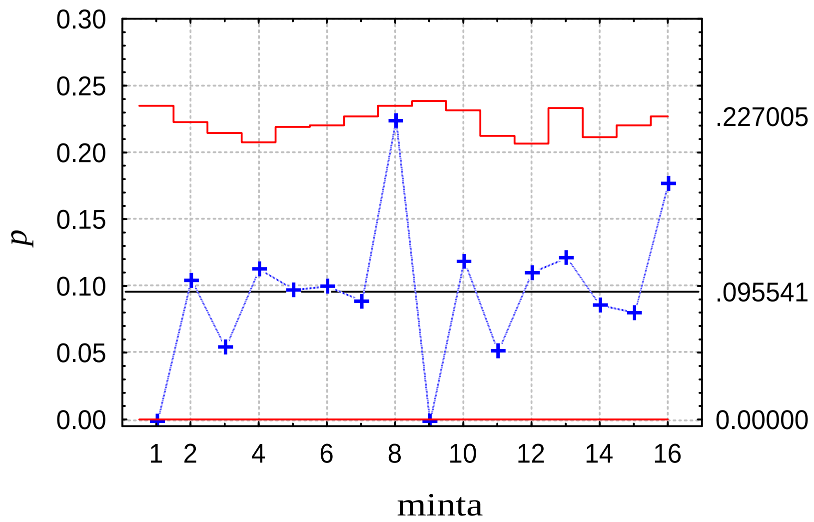
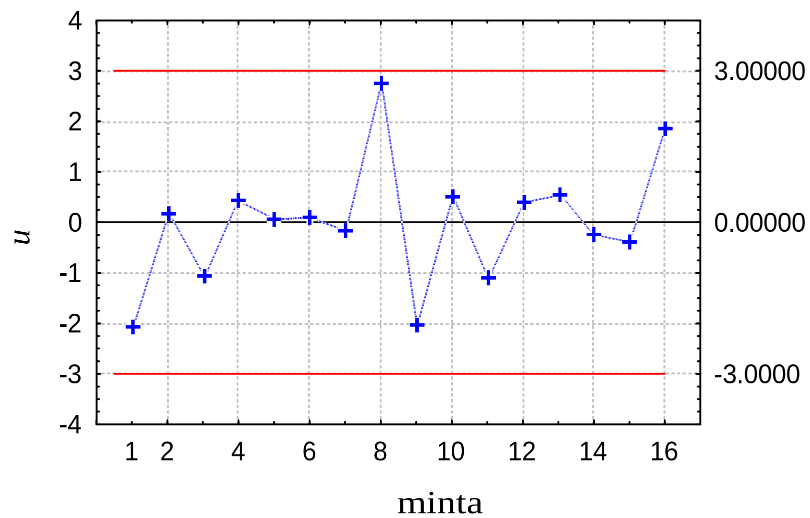
A 6-8. ábra mutatja azt a *p*-kártyát, amely egyedi beavatkozási határokkal készült. A 8. pont nem éri el a fölső beavatkozási határt.



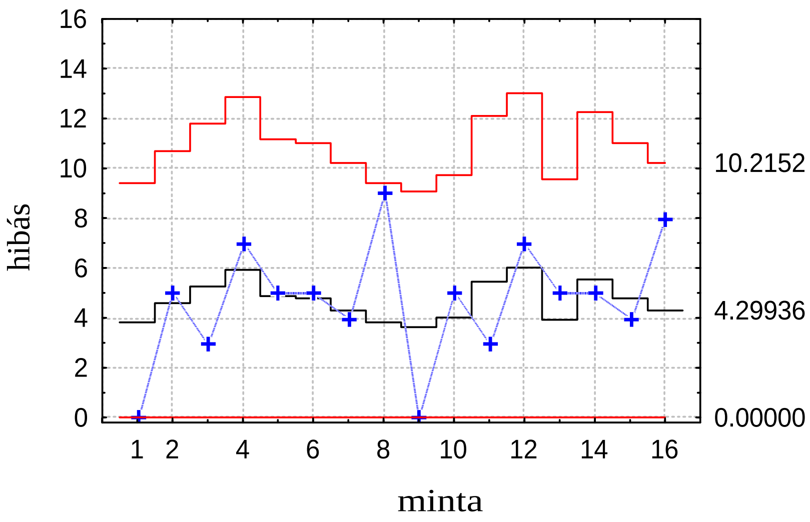
6-8. ábra. *p*-kártya a 6-9. példához egyedi beavatkozási határokkal, a STATISTICA programmal

A 6-9. ábra mutatja a normalizált változó ábrázolásával készült *p*-kártyát. A 8. pont itt sem éri el a fölsô beavatkozási határt, csak valamelyest megközelíti.

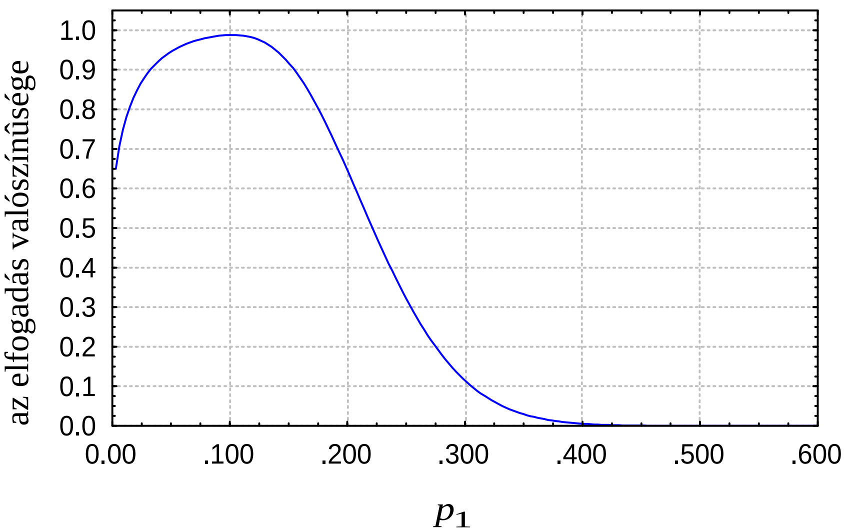


6-9. ábra. *p*-kártya a 6-9. példához, normalizált változó ábrázolásával, a STATISTICA programmal

Érdekességképpen a 6-10. ábrán bemutatjuk az *np*-kártyát, amelyet a különböző mintaelemszám figyelembe vételével készíthetnénk.



6-10. ábra. *np*-kártya a 6-9. példához, a STATISTICA programmal



6-11. ábra. *p*-kártya működési jelleggörbéje a 6-9. példa adataival, a STATISTICA programmal

Működési jelleggörbe

A *p*-kártya működési jelleggörbéjéről leolvashatjuk annak β valószínűségét, hogy elfogadjuk a nullhipotézist (stabil a folyamat, csak véletlenszerű ingadozások terhelik), pedig nem az, vagyis p értéke megváltozott. A másodfajú hiba valószínűsége függ a mintaelemszámtól és attól a $\Delta = p_1 - p_0$ különbségtől, amit ki akarunk mutatni.

A másodfajú hiba valószínűsége a következő összefüggéssel számítható ki:

$$\beta = F\left(\hat{p} < UCL_p \middle| p_1\right) - F\left(\hat{p} \leq LCL_p \middle| p_1\right)$$

Mivel a működési jelleggörbe kiszámítása nem kötődik az aktuális ellenőrzéshez, tehát nem az üzemi helyszínen zajlik, célszerűen számítógéppel történik. A 6-11. ábra a 6-9. példa adataival az átlagos mintaelemszámhoz (n=49.063) számított beavatkozási határokkal fölvett p-kártya működési jelleggörbéjét mutatja.

Mint a méréses ellenőrző kártyáknál, itt is használhatjuk az átlagos sorozathosszakat (*ARL*).

6.3. Hiba-kártyák

Egy termék többféle szempontból is hibás lehet, vagy egy-egy hibaféleség, amiből bizonyos számú még megengedhető, többször is előfordulhat egy terméken. Ettől még a termék egésze akár megfelelő is lehet. Tipikus példa az autó festési hibája. A hiba-kártyákon a mintában talált hibák számát ábrázoljuk a minta sorszáma függvényében.

A hiba-kártya (c- és u-kártya) több információt kínál, mint a selejt-kártya (np- és p-kártya). Az ilyen kártyák fölvételekor egyrészt regisztrálhatjuk, hogyha a termék-egységnek több vagy többféle hibája van, nemcsak azt, hogy hibás vagy nem hibás; másrészt a hibafajták osztályozásával, csoportosításával azonosíthatjuk a leggyakoribb hibafajtákat (Pareto-analízis), és közelebb juthatunk kiküszöbölésükhöz.

Annak valószínűsége, hogy egy adott helyen (pl. a jobb első ajtó ablaka fölött, középen, egy kijelölt 1 cm^2-es darabon) festési hiba legyen, nagyon-nagyon kicsi, de a hibalehetôségek száma (a cm^2-ek száma) az egész ajtón vagy több ajtón nagyon nagy, ezért a Poisson-eloszlás a megfelelő modell.

Legyen n a lehetséges hibahelyek száma, p egy-egy helyen a hiba előfordulási valószínűsége ($p \to 0$, $n \to \infty$). A hibák k száma eloszlásának sűrűségfüggvénye:

$$p(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

ahol λ a Poisson-eloszlás paramétere ($\lambda = np$).

A hibák k számának várható értéke és varianciája:

$$E(k) = \lambda,$$

$$Var(k) = \lambda.$$

Az *előzetes adatfelvétel* arra szolgál, hogy adatokat gyűjtsünk a folyamat λ paraméterének becsléséhez.

A *gyártásközi ellenőrzésnél* a nullhipotézis az, hogy a Poisson-eloszlás λ paraméterének értéke ugyanaz, mint az előzetes adatfelvételnél (λ_0), vagyis a folyamatban csak véletlen ingadozások vannak. Az ellenhipotézis, hogy veszélyes hiba fordul elő, vagyis a folyamat λ paramétere megváltozott (λ_1).

6.3.1. *c*-kártya

A *c*-kártyán az azonos méretű mintákban talált hibák számát ábrázoljuk, a minta sorszáma függvényében.

A minta méretét a vizsgálati egységek számával adjuk meg. Az egység lehet egy termék-egyed (egy autó jobb első ajtaja), vagy több egyed (pl. 10 ajtó, az egy műszakban gyártott ajtók, ha ez változatlan). Lehet 1 m hegesztési varrat, egy kosár fröccsöntött műanyag csődarab stb. Maga a minta állhat egyetlen egységből (egy ajtó ill. 10 ajtó; 1 m varrat; egy kosár csődarab), de több egységet is kitehet (például lehet 3 műszak gyártmányának együttese, 20 m varrat, 5 kosár cső).

Az előzetes adatfelvételnél a folyamat λ paraméterének becslésére a minta $\bar{c}$ átlagos hibaszámát kapjuk:

$$\bar{c} = \frac{\sum_{i}^{m} c_i}{m},$$

ahol c_i az *i*-edik mintában talált hibák száma, *m* a vizsgált minták száma.

Gyártásközi ellenőrzésnél a kártya középvonala, fölső és alsó beavatkozási határai a $\pm 3\sigma$ konvenció szerint:

$$CL_c = \bar{c},$$

$$UCL_c = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}},$$

$$LCL_c = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}},$$

ahol $\bar{c}$-ra az előzetes adatfelvételnél kapott értéket helyettesítjük.
Ha az alsó beavatkozási határra negatív érték adódik, zérusra kell igazítani.

A Poisson-eloszlás nem szimmetrikus, tehát a $\pm 3\sigma$ határ alatt és fölött nem azonos valószínűséggel fordul elő érték. Ez azt jelenti, hogy annak valószínűsége, hogy a $\pm 3\sigma$ konvenció szerint (tehát normális eloszlással való helyettesítéssel) kijelölt beavatkozási határokon kívül találjuk a *c* valószínűségi változó értékét, jelentősen eltérhet a pontosan számított valószínűségtől. Szokás ezért a Poisson-eloszlású változót transzformálni, itt

$$y = \sqrt{c}$$

a megfelelő transzformáció. Ez részint szimmetrikussá, részint állandó varianciájúvá teszi a valószínűségi változót.

A vizsgált egységek egy mintába vett számát (a minta nagyságát) úgy kell meghatározni, hogy az alsó beavatkozási határ pozitív érték legyen. Ha több ajtó, hosszabb varrat, több csődarab hibáit számláljuk le, vagyis a minta nagyobb, a hibák $\bar{c}$ átlagos száma nagyobb lesz. Az $np \geq 5$ ökölszabály megfelelője itt a $\bar{c} \geq 5$ előírás. Azt is célszerű mérlegelni, hogy az elsőfajú hiba adott α valószínűsége mellett az adott Δ különbség kimutatásához tartozó másodfajú hiba β valószínűsége ne legyen túl nagy, ami szintén az egy mintába tartozó vizsgálati egységek számának növelését indokolhatja.

6-10. példa

Egy autógyárban gyártott ajtókon átlagosan 2 festési hiba van. Hány ajtó tartozzék egy mintába, hogy az alsó beavatkozási határ pozitív érték legyen? Számítsuk ki a kártya paramétereit is!

Jelölje *r* az egy mintába tartozó ajtók számát, ekkor a mintánkénti átlagos hibaszám 2*r*, az alsó beavatkozási határ:

$$LCL_c = 2r - 3\sqrt{2r} > 0$$

Ebből r>4.5, vagyis egy mintában legalább 5 ajtónak kell lennie, és a gyártásközi ellenőrzésnél használt *c*-kártyán $\bar{c}$ 5 ajtó átlagos hibaszáma, tehát $\bar{c}$ =10.

A kártya paraméterei:

CL_c=10,

$$UCL_c = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 10 + 3\sqrt{10} = 19.5 \Rightarrow 20,$$

$$LCL_c = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} = 10 - 3\sqrt{10} = 0.5 \Rightarrow 0.$$

Látszik, hogy az egész értékre való lefelé kerekítés miatt nem elég az LCL_c>0 előírás, tulajdonképpen LCL_c>1 szükséges. A $2r - 3\sqrt{2r} > 1$ előírásból adódó másodfokú egyenletet megoldva $r = 5.5$ adódik, vagyis 6 ajtó alkot egy mintát. Ezzel a kártya paraméterei:

CL_c=12,

$$UCL_c = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} = 12 + 3\sqrt{12} = 22.39 \Rightarrow 23,$$

$$LCL_c = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} = 12 - 3\sqrt{12} = 1.608 \Rightarrow 1.$$

Vagyis akkor minősítünk egy pontot veszélyes hibára utalónak, ha a 6 ajtó alkotta mintában legalább 23 hiba van. Akkor állapítjuk meg, hogy egy mintánál a hibaszám lényegesen kisebb az előzetes adatfelvétel szerintinél, ha benne legföljebb 1 hibát találtunk.

Az első- és másodfajú hiba valószínűsége, működési jelleggörbe, átlagos sorozathossz

Az első- és másodfajú hiba valószínűségének kiszámításához a normális eloszlással való közelítést használjuk, a kis diszkrét értékek miatt az ún. folytonossági korrekcióval.

$$\alpha_{\text{fölsô}} = 1 - F\left(UCL_c \middle| c_0\right)$$

$$\alpha_{\text{alsó}} = F\left(LCL_c \middle| c_0\right)$$

$$\beta = F\left(UCL_c \middle| c_1\right) - F\left(LCL_c \middle| c_1\right)$$

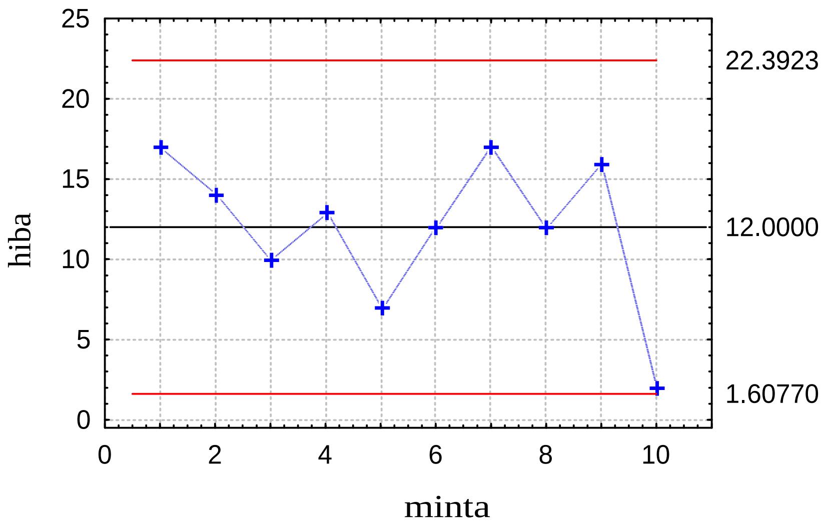
6-11. példa

Az előző (6-10.) példa szerinti ajtókból mintákat vesznek, 6 ajtó számít egy mintának. A következő táblázat mutatja a hibahelyek számát.

6-5. táblázat

minta	hiba
1	17
2	14
3	10
4	13
5	7
6	12
7	17
8	12
9	16
10	2

Készítsünk *c*-kártyát az adatok vizsgálatára!



6-12. ábra. *c*-kártya a 6-11. példához

6-12. példa

Számítsuk ki, hogy a 6-10. példában kapott beavatkozási határokhoz milyen első- és másodfajú hiba-valószínűség tartozik!

$$\alpha_{\text{fölsô}} = 1 - F\left(UCL_c \middle| c_0\right) = 1 - \Phi\left(\frac{23 - 0.5 - 12}{\sqrt{12}}\right) = 1 - \Phi(3.03) = 0.00122$$

$$\alpha_{\text{alsó}} = F\left(LCL_c \middle| c_0\right) = \Phi\left(\frac{1 + 0.5 - 12}{\sqrt{12}}\right) = \Phi(-3.03) = 0.00122$$

A nullhipotézis (c_0=12) szerinti működéshez tartozó átlagos sorozathossz:

$$ARL_0 = \frac{1}{0.00244} = 409.8\,.$$

A c_1=16 ellenhipotézisre (vagyis ha a hibaszám 12-rôl 16-ra nő):

$$\beta = F\left(UCL_c \middle| c_1\right) - F\left(LCL_c \middle| c_1\right) = \Phi\left(\frac{23 - 0.5 - 16}{\sqrt{16}}\right) - \Phi\left(\frac{1 + 0.5 - 16}{\sqrt{16}}\right) =$$

$$= \Phi(1.625) - \Phi(-3.625) = 0.94793 - 0.000144 = 0.9471\,.$$

A hibaszám ilyen megnövekedését átlagosan ARL_1 minta vétele után észleljük (átlagos sorozathossz):

$$ARL_1 = \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{0.0529} = 18.9\,.$$

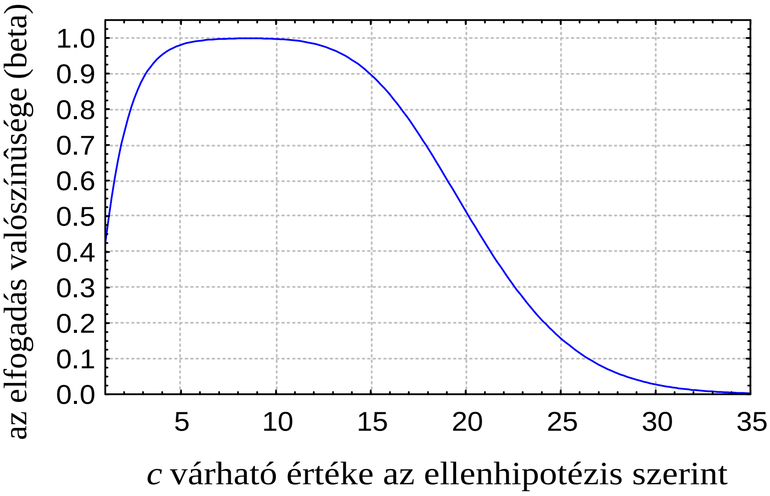
A c_1=8 ellenhipotézisre (vagyis ha a hibaszám 12-rôl 8-ra csökken):

$$\beta = F\left(UCL_c \middle| c_1\right) - F\left(LCL_c \middle| c_1\right) = \Phi\left(\frac{23 - 0.5 - 8}{\sqrt{8}}\right) - \Phi\left(\frac{1 + 0.5 - 8}{\sqrt{8}}\right) =$$

$$= \Phi(5.126) - \Phi(-2.298) = 1 - 0.0108 = 0.9892\,,$$

$$ARL_1 = \frac{1}{1-\beta} = \frac{1}{0.0108} = 92.6\,.$$

Vegyük észre, hogy a Poisson-eloszlás tulajdonságai a kétféle ellenhipotézisre β és ARL_1 különböző. A működési jelleggörbe a β értékét adja a c_1-c_0 hibaszám-különbség függvényében, ezt a 6-13. ábra mutatja.



6-13. ábra. *c*-kártya jelleggörbéje a 6-12. példához, a STATISTICA programmal

Számoljunk most a Poisson-eloszlás pontos összefüggéseivel!

A 6-6. táblázat mutatja a példában szereplő λ=8, 12, és 16 paraméterű Poisson-eloszlások eloszlásfüggvényének értékeit.

C_0=12

$$\alpha_{\text{fölsõ}} = P(x \geq 23) = 1 - F(23) = 1 - 0.998527 = 0.001473$$

$$\alpha_{\text{alsó}} = P(x \leq 1) = F(1) = 0.00007987$$

$$ARL_0 = \frac{1}{0.001473 + 0.00007987} = 644$$

6-6. táblázat

x	$F(x,12)$	$F(x,16)$	$F(x,8)$
0	0.00000000	0.00000000	0.00000000
1	.00007987	.00000191	.00301916
2	.00052226	.00001632	.01375397
3	.00229179	.00009314	.04238011
4	.00760039	.00040044	.09963240
5	.02034103	.00138379	.19123606
6	.04582231	.00400604	.31337428
7	.08950450	.00999978	.45296091
8	.15502778	.02198725	.59254745
9	.24239216	.04329832	.71662436
10	.34722942	.07739602	.81588582
11	.46159749	.12699267	.88807603
12	.57596540	.19312154	.93620281
13	.68153579	.27451094	.96581931
14	.77202458	.36752735	.98274301

15	.84441570	.46674522	.99176899
16	.89870901	.56596255	.99628198
17	.93703372	.65934376	.99840574
18	.96258353	.74234927	.99934963
19	.97872024	.81224858	.99974706
20	.98840226	.86816808	.99990603
21	.99393485	.91077342	.99996659
22	.99695263	.94175909	.99998861
23	.99852712	.96331436	.99999627
24	.99931437	.97768453	.99999883
25	.99969224	.98688144	.99999964

Már a közelítő számításnál kapott *ARL*=410 érték is elég nagy volt, ehhez képest még nagyobb biztonságban érezhetjük magunkat, mert a pontos számítás szerint átlagosan csak 644 mintánként fordul elő téves riasztás.

c_1=16

$$\beta = F\left(UCL_c \middle| c_1\right) - F\left(LCL_c \middle| c_1\right) = F\left(23 \middle| 16\right) - F\left(1 \middle| 16\right) = 0.9633 - 0.000002 =$$
$$= 0.9633$$

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - 0.9633} = 27.25$$

(A közelítő számításnál 18.9 volt az eredmény.)

c_1=8

$$\beta = F\left(UCL_c \middle| c_1\right) - F\left(LCL_c \middle| c_1\right) = F\left(23 \middle| 8\right) - F\left(1 \middle| 8\right) = 0.999996 - 0.00302 =$$
$$= 0.9967$$

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - 0.9967} = 303.03$$

A közelítő számításnál az eredmény 92.6 volt! A különbség gyakorlati szempontból is jelentős.

6.3.2. *u*-kártya

Előfordulhat, hogy a minta mérete nem állandó. Például akkor, ha az autó-ajtók nem azonos típusúak, a hegesztési varrat vizsgált hossza változik stb. Ez a helyzet a minden termék-egyedre kiterjedő ellenőrzésnél (full inspection), ha a naponként gyártott termék-egyedek száma különböző. Ilyen esetben például az egy nap gyártott autók festési hibáinak száma nem alkalmas változó.

A c-kártya középvonala a minta átlagos hibaszáma. Ha a minták mérete változó, ezt a középvonalat korrigálni kell az egy mintába tartozó egységek számával, emiatt a középvonal ugrálni fog. Hasonlóan viselkednek a c-kártya beavatkozási határai is.

Ezért változó méretű minták esetén az u-kártyát használjuk. Neve ellenére nem a normalizált normális eloszlásra épül.

Az u-kártyán az i-edik minta valamilyen összehasonlító egységre (pl. festésnél 1 m^2-re, fröccsöntött csőszakaszoknál egy darabra, 1 m hegesztési varratra) vonatkoztatott u_i hibaszámát ábrázoljuk:

$$u_i = \frac{c_i}{n_i},$$

ahol c_i a minta hibaszáma, n_i a minta mérete (m^2, darab, m).

Megjegyezzük, hogy bár c_i egész szám, a hányados képzés következtében u_i nem egész típusú.

A kártya paraméterei:

$$CL_u = \overline{u},$$

$$UCL_u = \overline{u} + 3\sqrt{\frac{\overline{u}}{n_i}},$$

$$LCL_u = \overline{u} - 3\sqrt{\frac{\overline{u}}{n_i}},$$

ahol $\overline{u}$ az átlagos hibaszám vonatkoztatási egységenként. Kiszámítása:

$$\overline{u} = \frac{\sum_i c_i}{\sum_i n_i},$$

vagyis az i-edik minta hibáinak száma osztva az i-edik minta méretével, vonatkoztatási egységeinek számával (pl. felületével, darabszámával, a mintába tartozó hegesztési varrat hosszával).

Minthogy n_i változik mintáról mintára, a beavatkozási határ is változik. A korábban ismertetett ellenőrző kártyákhoz hasonlóan a következő lehetőségeink vannak:

- változó beavatkozási határok
- a beavatkozási határokat egy átlagos mintanagysághoz számítjuk ki:

$$UCL_u = \overline{u} + 3\sqrt{\frac{\overline{u}}{\overline{n}}}\ ;\ LCL_u = \overline{u} - 3\sqrt{\frac{\overline{u}}{\overline{n}}}\ .$$

Itt is célszerű az átlagos mintaméretből számolt beavatkozási határokhoz közel eső pontokat a pontos (az adott minta méretéhez tartozó) beavatkozási határokkal újraértékelni.

6-13. példa

Az előzetes adatfelvételnél 5, egyenként 1.1 m^2-es ajtó festési hibáit számolták le, ez volt egy minta. 20 ilyen mintából becsülték a folyamat λ paraméterét. Az mintánkénti hibaszámot átlagosan 7.2-nek találták.

A gyártásközi ellenőrzést különböző felületű ajtókon kell végezni, minden egyes ajtót megvizsgálva. Mik lesznek az *u*-kártya paraméterei?

$$CL_u = \bar{u} = \frac{7.2}{5 \cdot 1.1} = 1.309 \text{ (hiba/m}^2\text{)}$$

$$UCL_u = 1.309 + 3\sqrt{\frac{1.309}{n}}$$

$$LCL_u = 1.309 - 3\sqrt{\frac{1.309}{n}}$$

ahol n a vizsgálandó ajtó felülete. Például egy 0.9 m^2-es ajtóra a négyzetméterenkénti hiba elfogadási tartománya -2.21 (zérusra igazítandó) és 4.92.

6.4. A méréses és minősítéses ellenőrző kártyák összevetése

A méréses ellenőrző kártyák folytonos valószínűségi változóval dolgoznak, a minősítéses kártyák diszkrét valószínűségi változóval.

A méréses ellenőrző kártyák több információt adnak, érzékenyebbek, már az előtt jelzik a veszélyes hibákat (pl. a beállás eltolódását), hogy tetemes arányban gyártanánk selejtet, mert a növekvő eltolódás kimutatásához annak nem kell még elérnie a tűréshatárt, a kártya előbb jelez. A méréses kártyák sokkal kisebb mintaelemszámot igényelnek, de a mérés általában költségesebb, mint a minősítés, és nem is mindig alkalmazható.

Mikor milyen kártyát használjunk?

Montgomery (1991, p. 249) a következő szempontokat javasolja:

Méréses ellenőrző kártyát használjunk, ha

- új folyamattal van dolgunk, vagy az ismert folyamatban új terméket gyártunk;
- a folyamat már egy ideje működik, de nem képes a minőségi előírásoknak megfelelni;
- a folyamattal minőségi problémák vannak, és az ellenőrző kártyákat diagnosztikai eszközként próbáljuk használni;
- roncsolásos vagy drága a vizsgálat, mert a minősítéseshez sokkal több minta kell;
- a folyamat megfelelő működése esetén csökkenteni akarják a mintavételezés és ellenőrzés mértékét;

- minősítéses kártyákat próbáltak használni, de a folyamat vagy instabil (veszélyes hibák jelentkeznek), vagy stabil ugyan, de az ingadozás mértéke elfogadhatatlan;
- nagyon szigorúak a tűrési előírások, pl. összeillesztésre szánt alkatrészek esetén;
- az operátornak döntenie kell, hogy beavatkozzék-e, ill. éppen egy beavatkozás eredményét akarják kiértékelni;
- a termék minőségi előírásai megváltoztak;
- a folyamat stabilitása és képessége állandóan bizonyítandó (pl. gyógyszeriparban, egészségügyi cikkeknél).

Minősítéses ellenőrző kártyát használjunk, ha

- a folyamat bonyolult, és a termék minőségét csak azzal lehet jellemezni, hogy vannak-e hiba-féleségek, működik vagy nem működik stb. (pl. számítógépek, autók, ill. ezek nagyobb alegységei);
- a folyamatot szabályozni kell, de nincs mérési lehetőség;
- a folyamat megfelelő működését nyilván kell tartani, a vezetésnek képet kell alkotnia, és ez a minősítéses kártyával kevésbé költséges mint a méréses ellenőrzés.