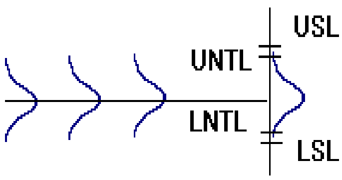
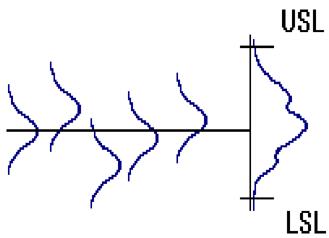
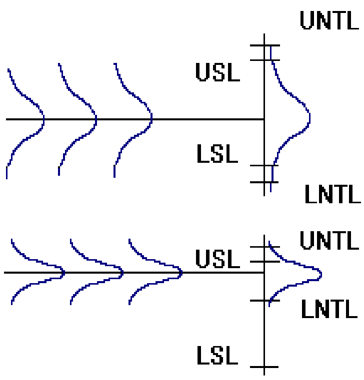
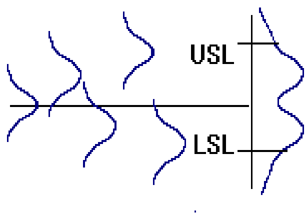
II. Ellenőrző kártyák

3. Bevezetés a statisztikai minőségszabályozásba

3.1. Stabilitás és képesség

Képzeljünk el egy gyártási folyamatot, pl. alkatrészek előállítása préseléssel, forgácsolással, fröccsöntéssel; de lehet ez szakaszos vagy folyamatos vegyipari vagy élelmiszeripari technológia is. A folyamatból kikerülő termék-példányok (vagy a folyamatosan gyártott műanyag cső egyes szakaszai) nem tökéletesen egyformák, mivel különféle jellemzőikre, pl. jellemző méretükre, felületük egyenletességére, felületi hibáik számára, hatóanyagtartalmukra, szakítószilárdságukra számtalan, egyenként kis hatású tényező van befolyással, így az ingadozás elkerülhetetlen.

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">STABIL?</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>igen</td><td>nem</td></tr>
<tr><td rowspan="2">KÉPES?</td><td>igen</td><td>a) </td><td>b) </td></tr>
<tr><td>nem</td><td>c) </td><td>d) </td></tr>
</table>

3-1. ábra. A folyamat képessége és stabilitása

A folyamatot akkor nevezzük stabilnak vagy statisztikailag kézbentartottnak (angolul: in statistical control), ha az ingadozás véletlenszerű, időben állandó, nincsenek jól felismerhető és megnevezhető okai (3-1a. és c. ábra). A véletlen ingadozás (közönséges hibaok, angolul: random couse) határai ilyenkor normális eloszlás esetén a $\pm 3\sigma$ szabállyal adhatók meg, mivel egy normális eloszlású valószínűségi változó 0.9973 (99.73%) valószínűséggel a várható értéke körüli $\pm 3\sigma$ szélességű intervallumban vesz föl értékeket. E határokat a természetes ingadozás alsó és fölső határának *(UNTL*: upper natural tolerance limit; *LNTL*: lower natural tolerance limit) nevezik. Nem normális eloszlású valószínűségi változónál a $\pm 3\sigma$ szélességű intervallumhoz 0.9973 más valószínűség tartozik.

Ha a folyamat stabil, a múltbeli adatok alapján jövőbeni viselkedése bizonyos határok között kiszámítható. Ez úgy értendő, hogy meg tudjuk mondani, milyen valószínűséggel adódik e határokon kívüli vagy belüli érték (Shewhart, 1931).

Attól még, hogy a folyamat statisztikai értelemben stabil, nem biztos, hogy az adott gyártás minőségi követelményeinek megfelel, vagyis a minőségi mutatók az előírt tűrésmezőn belül vannak (*USL*: upper specification limit; *LSL*: lower specification limit). Szélső esetben az is előfordulhat, hogy a minőségi jellemző csak véletlenszerű ingadozást mutat, de ez az ingadozás olyan mértékű, vagy az ingadozás centruma annyira eltér az előírt értéktől, hogy a gyártott termék zöme selejt (3-1c. ábra). Természetesen ilyenkor az ingadozást csökkenteni kell, ill. centrumát át kell állítani.

A minőséget súlyosan veszélyezteti és kézbentarthatatlanná teszi, ha egy-egy, a későbbiekben esetleg azonosítható, megnevezhető ok nagyobb mértékű, nem véletlenszerű változást idéz elő, pl. a gép beállítása megváltozik, a szerszám kopik, a kezelő hibát vét, a nyersanyag összetétele eltér az addigitól stb. Ilyenkor a folyamatot instabilnak, statisztikailag nem kézbentartottnak (angolul: out of control) nevezzük (3-1b. és d. ábra), a hiba neve veszélyes hiba (assignable couse). Az instabilitás azért veszélyes, mert megjósolhatatlan következményekkel jár, vagyis nem teljesül, hogy a folyamat jövőbeni viselkedése bizonyos határok között kiszámítható. A folyamat egy szakaszában (a termelés egy periódusában) végzett mérések, megfigyelések alapján nem következtethetünk arra, hogy egy másik szakaszban milyen lesz a termék. A veszélyes zavarok akár az ingadozás centrumát, akár mértékét, akár mindkettőt megváltoztathatják.

Okozhat az ilyen rendellenesség akkora eltérést, hogy a minőségi jellemző a tűrésmezőn kívülre kerül (3-1d. ábra), de az is előfordulhat, hogy nem olyan nagy a hatása, és az előírt határokon belül marad a minőségi jellemző értéke (3-1b. ábra). Az instabilitás és az előírásokhoz képest túlságosan nagy ingadozással megvalósuló stabil működés a termék minősége szempontjából egyaránt elfogadhatatlan, de kiküszöbölésük más-más intézkedést igényel.

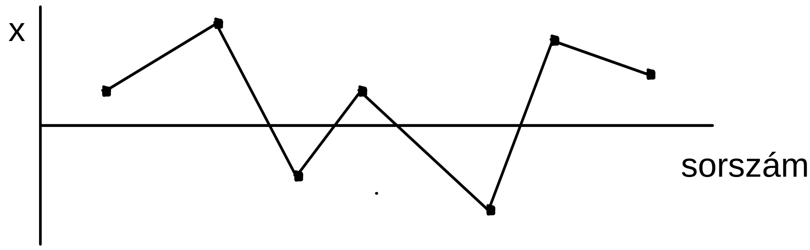
A folyamat stabilitásának vizsgálatára az ellenőrző kártyák (control charts) szolgálnak, ez a 3. fejezet további részeinek és a 4-6. fejezeteknek a tárgya. A tűrésmezőnek való megfelelőséget az ún. folyamatképességi vizsgálattal (process capability study) tanulmányozhatjuk, erről szól a 7. fejezet.

Az ingadozás csökkentésének leghatékonyabb módszere a minőségjavító kísérlettervezés. Ezzel a 12. fejezetben foglalkozunk.

3.2. Az ellenőrző kártyák statisztikai háttere

A módszer célja a folyamat stabilitásának vizsgálata, vagyis annak eldöntése, hogy az ingadozások, eltérések csak a véletlennek tulajdoníthatók, és így a folyamat szokásos működése szerintiek (a folyamat stabil), vagy pedig vannak olyan okok, amelyek a folyamat jellegét megváltoztatják, így kiküszöbölésük beavatkozást igényel (a folyamat instabil). Pontosabban azt vizsgáljuk, hogy az eloszlás nem változott-e meg, nem más-e az eloszlás típusa, nem különbözőek-e a paraméterei.

Amikor a kórházban azt akarják folyamatosan ellenőrizni, hogy a beteg állapota nem változott-e meg, testhőmérséklet-adatait a lázlapon ábrázolják, így az esetleges változás rátekintéssel érzékelhető. A gyártásközi ellenőrzésnél ehhez hasonlóan úgy járunk el, hogy a folyamatból időközönként mintát veszünk, és a jellemző tulajdonság értékét vagy az abból képezett mutatót (átlag, szórás stb.) ábrázoljuk a minta sorszáma, a mintavétel időpontja, vagy más azonosító adata függvényében. Például a 3-2. ábrán lévő pontsort kapjuk.



3-2. ábra. A minta jellemző tulajdonsága a mintavétel sorrendje függvényében

Sok esetben a pontok elhelyezkedésének szemrevételezésével nem dönthető el, hogy azok csak véletlen ingadozást mutatnak, vagy valamilyen rendszerességet is, ezért a matematikai statisztika eszközeit használjuk a döntéshez. Aszerint, hogy a folyamatból vett minta milyen skálán értékelhető, a kártyákat két fő csoportra osztjuk:

- méréses ellenőrző kártyák (méret, tömeg, hatóanyag-tartalom, szakítószilárdság stb.)
- minősítéses ellenőrző kártyák (selejtarány, fajlagos hibaszám stb.).

3.2.1. A vizsgált hipotézis

Tegyük föl, hogy egy gyártási folyamatban (pörkölt kávé csomagba adagolása térfogat szerint) a termék valamely normális eloszlás szerint ingadozó x mérhető jellemzőjének (az egy csomagba töltött kávé tömegének) várható értéke μ=250 g, az ingadozás varianciája σ^2=1 g^2. Méréseket végzünk annak megállapítására, hogy a folyamat statisztikai tulajdonságai nem változtak-e meg a vizsgált időszakban, vagyis még mindig igaz-e, hogy x (a töltött tömeg) normális eloszlású, várható értéke μ=250 g, varianciája σ^2=1 g^2.

Vizsgáljuk most a várható értéket, vagyis a nullhipotézis szerint

H_0: $E(x) = \mu_0 = 250$ g.

Az ellenhipotézis az, hogy a várható érték megváltozott:

H_1: $E(x) \neq 250$ g.

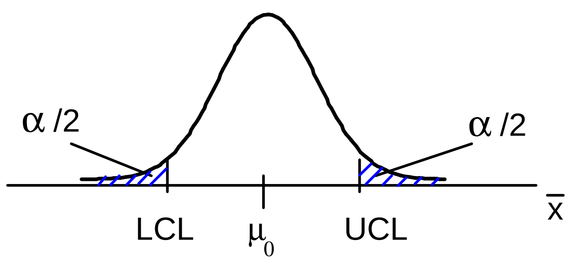
Ha az x várható értéke megváltozott (pl. a gép elállítódott, vagy a gépbe adagolt pörkölt kávé térfogattömege változott meg), be kell avatkoznunk.

Vegyünk e célból a gyártásból n=5 elemű mintát, és végezzünk egymintás u-próbát. A próbastatisztika: $u_0 = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$.

A nullhipotézist akkor fogadjuk el, ha az u_0 próbastatisztika aktuális értékére igaz, hogy $-u_{\alpha/2} < u_0 < u_{\alpha/2}$. Szemléletesebb, ha nem az u_0 próbastatisztikára, hanem az $\bar{x}$ átlagra adjuk meg az elfogadási tartományt:

$$\mu_0 - u_{\alpha/2}\sigma / \sqrt{n} < \bar{x} < \mu_0 + u_{\alpha/2}\sigma / \sqrt{n}.$$

Az ún. beavatkozási határok az elfogadási tartomány alsó határa (LCL: lower control limit) $\mu_0 - u_{\alpha/2}\sigma / \sqrt{n}$, és a fölső határa (UCL: upper control limit) $\mu_0 + u_{\alpha/2}\sigma / \sqrt{n}$. Ha az átlagérték az elfogadási tartományon kívülre esik, a nullhipotézist elutasítjuk (3-3. ábra). Vegyük észre, hogy az elfogadási tartomány az $\bar{x}$ átlagra, és nem x-re, tehát nem az egyedi mért adatokra vonatkozik. Ez azt jelenti, hogy amennyiben csak véletlenszerű ingadozás van, és veszélyes hiba nincs az adatokban, a mintaelemek $\bar{x}$ átlaga van 1-α valószínűséggel ebben a tartományban, nem pedig az egyes mintaelemek (v.ö. a 2-1. ábrával).



3-3. ábra. Alsó és fölső beavatkozási határ

3-1. példa

Pörköltkávé-adagoló automata töltötte csomagok tömegének feltételezett várható értéke 250 g, az adagolás ismert varianciája 1 g^2. A folyamatból vett 5 elemű minta átlaga: $\bar{x} = 249.6$ g. Megfelel-e az adagolt tömeg várható értéke a feltételezésnek, ha az elsőfajú hiba megengedett valószínűsége α=0.05?

A nullhipotézis: $E(x) = \mu_0 = 250$

Az u-próbastatisztika aktuális értéke:

$$u_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{249.6 - 250}{1 / \sqrt{5}} = -0.894$$

A függelék I. táblázatából $u_{\alpha/2} = 1.96$

A nullhipotézist elfogadjuk, mert a próbastatisztika aktuális értéke (0.894) az elfogadási tartományba esik ($-1.96 < u < 1.96$). Másképpen közelítve kiszámíthatjuk $\bar{x}$ elfogadási tartományát is:

$UCL = \bar{x}_{fölső} = \mu_0 + u_{\alpha/2}\sigma / \sqrt{n} = 250 + 1.96 \cdot 1.0 / \sqrt{5} = 250.877$,

$LCL = \bar{x}_{alsó} = \mu_0 - u_{\alpha/2}\sigma / \sqrt{n} = 250 - 1.96 \cdot 1.0 / \sqrt{5} = 249.123$.

Az 5 elemű minta átlaga (249.6) e két határ közé esik, tehát elfogadjuk a nullhipotézist, vagyis azt, hogy az 5 elemű minta a 250 g várható értékű sokaságból származik.

3.2.2. Első- és másodfajú hiba

Itt α az elsőfajú hiba elkövetésének valószínűsége, vagyis annak esélye, hogy bár a nullhipotézis igaz (tehát $E(x)=\mu_0$, vagyis a töltött tömeg 250 g), a próbastatisztika (u_0 vagy $\bar{x}$) az elfogadási tartományon kívüli értéket vegyen föl, és így a nullhipotézist elutasítsuk. Ha pl. α értékét 0.002-re választjuk, akkor kb. minden ezer mintavételből kétszer fordul elő az elsőfajú hiba, vagyis hogy azt hisszük, nem μ_0 a várható érték, pedig az, tehát indokolatlanul avatkoznánk be. Ekkor $u_{\alpha/2} = 3.09$. A beavatkozás sokszor költséges (a gyártó sort meg kell állítani), ezért kis esélyt szokás adni a hamis riasztásra. Igen elterjedt, hogy $u_{\alpha/2}$ értékét 3-nak választják (ún. $\pm 3\sigma$ határ), ekkor α=0.0027, vagyis ezer esetből kb. háromszor tévedünk.

Szakmailag nem mindig érdekes mindkét irányú eltérés. Egyes esetekben csak a pozitív eltéréstől kell tartanunk (pl. a szennyezők koncentrációja egy élelmiszerben), máskor csak a negatív eltérés aggasztó (pl. gumi szakítószilárdsága). Ilyen esetekben annak valószínűsége, hogy u meghaladja az előbbi 3.09 kritikus értéket, nem 0.002, hanem csak annak fele, 0.001.

A következő példában kiszámítjuk a másodfajú hiba β valószínűségét, vagyis annak kockázatát, hogy amennyiben az x mérhető jellemző és annak az 5 elemű mintára vett átlagos értéke nem μ_0 körül, hanem μ_1 körül ingadozik, $\bar{x}$ értéke mégis a nullhipotézis elfogadási tartományába essék (a várható érték nem μ_0, hanem μ_1, ez az ún. ellenhipotézis).

3-2. példa

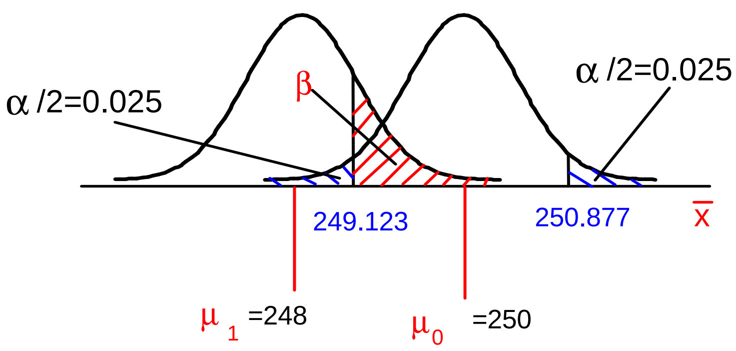
Az előbbi pörköltkávé-adagoló automata (μ_0=250 g, σ^2= 1 g^2) elállítódott, a csomagok tömege 250 g helyett 248 g körül ingadozik (a várható érték μ_1=248 g). Az eltérés $\Delta = |\mu_1 - \mu_0| = 2$ g, $\delta = \Delta / \sigma = 2$. Mi a valószínűsége annak, hogy a folyamatból vett 5 elemű minta átlaga alapján elfogadjuk a nullhipotézist, vagyis azt higgyük, hogy a várható érték μ_0=250 g, ha az elfogadási tartományt az elsőfajú hiba α=0.05 valószínűségéhez jelöljük ki?

Ha a valóságban μ=μ_1=248 g, annak valószínűsége, hogy egy 5 elemű minta átlaga a nullhipotézis elfogadási tartományába essék, vagyis 249.123 és 250.877 között legyen (3-4. ábra, függelék I. táblázat):

$$\beta = P\left(249.123 < \bar{x} < 250.877 \middle| \mu = 248\right) = \Phi\left(\frac{250.877 - 248}{1/\sqrt{5}}\right) -$$

$$-\Phi\left(\frac{249.123 - 248}{1/\sqrt{5}}\right) = F(6.43) - F(2.511) = 1 - 0.99396 = 0.006 .$$

Ez azt jelenti, hogy Δ=2σ nagyságú eltolódást ezer eset közül csak hatszor nem veszünk észre. Kisebb eltolódásnál nem ilyen kedvező a helyzet, pl. ha Δ=σ, vagyis az eltolódás 1.0 g, a másodfajú hiba valószínűsége már 0.8, vagyis az esetek 80%-ában nem észleljük az eltolódást.



3-4. ábra. Elfogadási határok a 3-2. példában

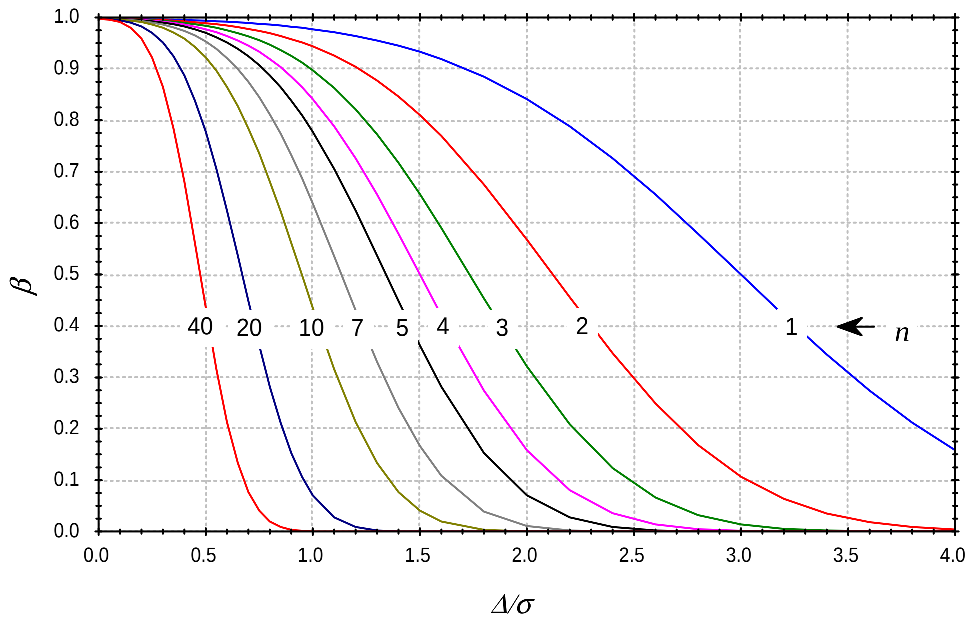
3.2.3. A kimutatható eltérés nagysága: a jelleggörbe

Az α adott értéke (az elsőfajú hiba megengedett valószínűsége) mellett a másodfajú hiba β valószínűsége a kimutatandó $\Delta = \mu_1 - \mu_0$ különbségtől (vagyis hogy mekkora az az eltérés, amit még nem vennénk észre), és a minta elemszámától függ. A függést a jelleggörbe (OC curve: operating characteristic curve) adja meg, ilyet mutat a 3-5. ábra a $\pm 3\sigma$ konvenció szerinti határra ($\alpha = 0.0027$), vagyis amikor

$$UCL = \bar{x}_{fölső} = \mu_0 + 3\sigma / \sqrt{n} ,$$

$LCL = \overline{x}_{alsó} = \mu_0 - 3\sigma / \sqrt{n}$.

Látjuk például, hogy annak valószínűsége, hogy 5 elemű minta átlagértéke alapján egy Δ=2σ nagyságú eltolódást a várható értékben ne vegyünk észre, 0.067. Nagyobb eltérést még kisebb valószínűséggel mulasztunk el fölismerni, és nagyobb mintaelemszám esetén is csökken a másodfajú hiba valószínűsége.



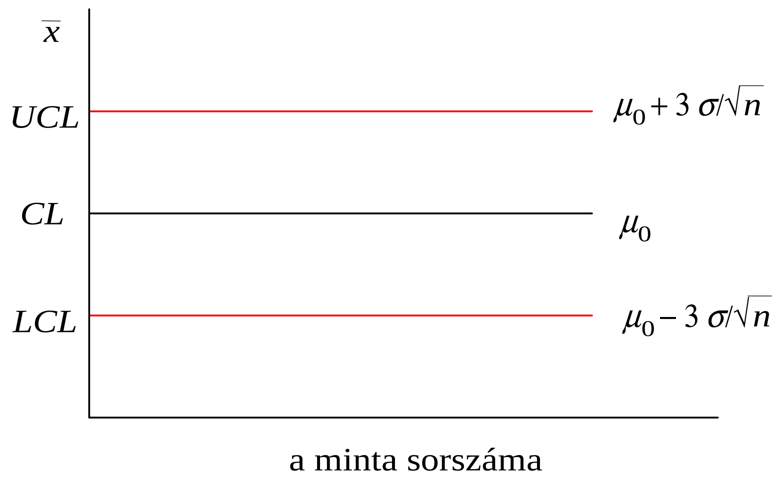
3-5. ábra. Az átlag-kártya működési jelleggörbéje ha az elfogadási tartományt a $\pm 3\sigma$ konvenció szerint jelöljük ki (n a minta elemszáma)

Hogy mekkora eltérést akarunk kimutatni (vagyis a $\Delta = \mu_1 - \mu_0$ különbség), az adott gyártástól függ. A pörkölt kávénál például 250 g helyett esetleg nem nagy baj, ha 248 vagy 252 g-ot töltünk egy csomagba, de 10 g-nyit már nem szabad tévednünk. Hogy mekkora kockázatot engedünk meg a selejt gyártására (vagyis egy nagy Δ eltéréshez tartozó β nagysága), az is műszaki-gazdasági kérdés: függ attól, hogy a selejt javítható-e, és milyen költségekkel jár. Például forgácsolással előállított alkatrésznél, ha az átmérő az előírtnál nagyobb, javítható, ha kisebb, nem javítható. A mérlegelésnél az is figyelembe veendő, hogy a mintaelemszám növelése is költséggel jár.

3.2.4. Rendszeres mintavétel és hipotézisvizsgálat: ellenőrző kártya[1]

A következtetés biztonságát úgy javíthatjuk (α adott értéke mellett a β értékét úgy csökkenthetjük), ha nagyobb elemszámú mintára építünk. Ezt úgy is megtehetjük, hogy nem egyszer veszünk nagyobb elemszámú mintát (pl. 5 helyett 20-at), hanem többször kis mintát (négyszer veszünk 5 elemű mintát). Ha azonban a folyamatból többször veszünk mintát, egyúttal azt is ellenőrizhetjük, hogy időközben nem következett-e be változás.

Ha a mintavételt szabályos időközönként ismételjük, és a kapott átlag-értékeket egymás után ábrázoljuk, arra is választ kaphatunk, hogy az egymás utáni minták véletlenszerűen különböznek-e, vagyis a folyamatban csak véletlenszerűek-e a változások. Ez már egy ellenőrző kártya, amelyet a 3-6. ábra mutat.



3-6. ábra. Ellenőrző kártya vázlata

A kártyára berajzoljuk az $\bar{x} = \mu_0$ középvonalat (CL: center line), és az előbb kifejezett alsó és fölső beavatkozási határokat (LCL, UCL). A határok akkor érvényesek a mondott statisztikai tartalommal (meghaladásuk valószínűsége az $E(x)=\mu_0$ nullhipotézis érvényessége esetén 0.0027), ha $\bar{x}$ normális eloszlású, a variancia konstans, és számértéke éppen az, amelyet felhasználtunk a határok kiszámításához.

Érdemes itt megjegyezni, hogy a beavatkozási határokat nem a tűrésmező szabja meg, hanem az eloszlás (a természetes ingadozás) terjedelme. Nem azt kérdezzük a kártya megrajzolásakor ugyanis, hogy a gyártott termékek megfelelnek-e az

[1] Az “ellenőrző kártya” elnevezés nem túl szerencsés fordítása az angol “control chart”-nak. Helyesebb lett volna ellenőrző diagramnak nevezni, de nem így terjedt el, a magyar szabványok is az “ellenőrző kártya” elnevezést használják.

előírásoknak, hanem azt, hogy vizsgált minőségi jellemzőjük ingadozásának természete milyen, hogy csak véletlen ingadozás van-e, tehát a gyártási folyamat stabil-e.

Attól, hogy a kártyán több minta statisztikai jellemzőjét (itt átlagát) ábrázoljuk, α és β megadott számértéke külön-külön mindegyik mintára végzett hipotézisvizsgálatra érvényes, és ezek a vizsgálatok egymástól függetlenek. Ha a kártya egészét nézzük, tehát a több (m) hipotézisvizsgálatot együtt, annak valószínűsége, hogy valamelyiknél elsőfajú hibát vétsünk (azt higgyük, hogy a várható érték megváltozott), $m\alpha$. Például 1000 mintát véve, a $\pm 3\sigma/\sqrt{n}$ beavatkozási határok (α = 0.0027) esetén kb. háromszor akkor is elutasítjuk a nullhipotézist (hogy a várható érték változatlan), amikor pedig az igaz, és csak véletlen ingadozás van ($1000 \cdot 0.0027 \approx 3$).