III. Képességvizsgálatok

7. A folyamatképesség vizsgálata

A 3. fejezetben láttuk, hogy ahhoz, hogy egy folyamat jellemzőjét a múltbeli viselkedése alapján egy jövőbeni időpontra kiszámíthassuk (pontosabban, hogy megadhassuk, adott valószínűséggel milyen határok közötti értékeket vesz föl), a folyamatnak stabilnak kell lennie. E stabilitást vizsgálhatjuk az ellenőrző kártyákkal, vagyis azt, hogy a folyamat jellemzőjének ingadozását leíró valószínűség-eloszlás paraméterei nem változtak-e meg. A 3-1. ábrán láttuk, hogy a stabilitás még nem elegendő ahhoz, hogy egy jellemző értéke az előírt határok között legyen. Stabil folyamat jellemzőjének (véletlenszerű) ingadozása is lehet túlságosan nagy a tűrésmező szélességéhez képest, ill. lehet, hogy az ingadozás nem nagy, de centruma nem az előírt érték.

A képességvizsgálat célja annak megállapítása, hogy a folyamat képes-e az előírásoknak megfelelő jellemző-értékeket szolgáltatni. A 7.1. pontban a minőség-képességi indexeket ismertetjük, a 7.2. pont tárgya a Taguchi-féle minőség-fogalom és veszteségfüggvény.

A 3-1. ábrából az is leszűrhető, hogy először a stabilitásról kell gondoskodni, és csak ha ez megvan, akkor indokolt azt értékelni, hogy az ingadozás centrumának beállítása és az ingadozás mértéke elfogadható-e. Ha ugyanis a folyamat nem stabil, éppen nem tudjuk a jövőbeni viselkedését becsülni.

7.1. Minőség-képességi indexek

A folyamatképesség vizsgálata szűkebb értelemben bizonyos indexek kiszámítását jelenti, ezeket eredetileg a normális eloszlás szerint ingadozó jellemzőkre dolgozták ki, de bizonyos megfontolásokkal más eloszlású valószínűségi változókra is használhatók.

A tulajdonképpeni kérdés az, hogy a gyártott termék mekkora hányadára lesz igaz, hogy valamely jellemzője (mérete, tömege, koncentrációja, szilárdsága stb.) az előírt határok közé (ill. azokon kívül) esik, vagyis a gyártott termék mely hányada felel meg az előírásoknak, és mekkora része selejt.

Az előírt határokat az *USL* és *LSL* (upper specification limit, lower specification limit) adatokkal jellemezzük.

A használatos indexeket ismertetjük a következőkben.

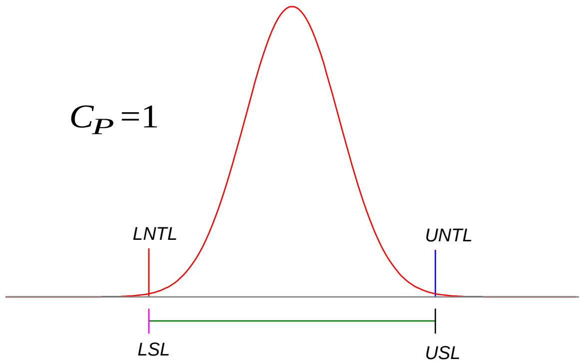
Minőség-képességi index (Process capability)

Definíciója a következő:

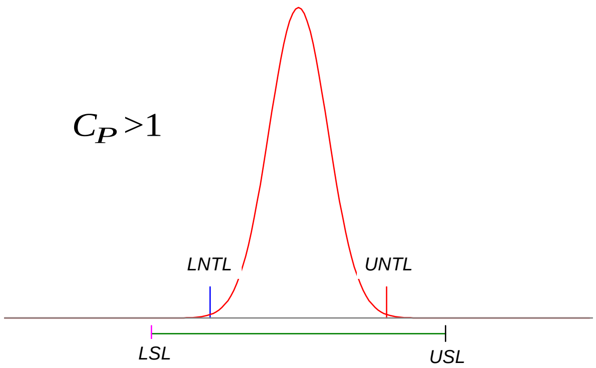
$$C_P = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$$

A normális eloszlású valószínűségi változó 99.73 % valószínűséggel a $\pm 3\sigma$ határon belül van, tehát természetes ingadozása határainak távolsága (*UNTL*, *LNTL*) éppen megegyezik a tűrésmező szélességével.

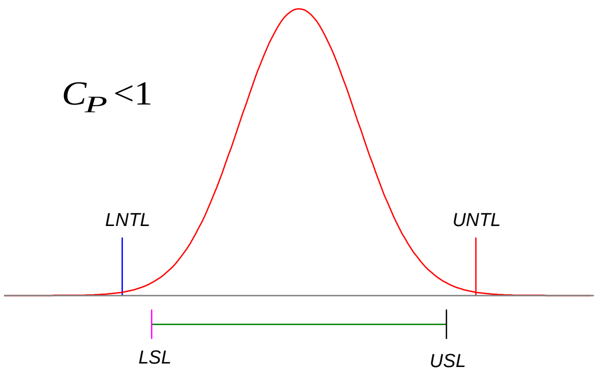
Ha C_P=1, 1000 közül 3 termék-egyed lesz kívül a tűrésmezőn, feltéve, hogy az ingadozás centruma (a várható érték) éppen a tűrésmező közepe. Ha C_P>1, még ennél is kisebb a selejtarány. Más szavakkal, C_P a Gauss-görbe alatti terület azon részének arányát jellemzi, amely a tűrésmezőbe esik, ha a várható érték a tűrésmező közepén van (7-1a. ábra).



a)



b)

c) 

7-1. ábra. A C_P index szemléltetése

A C_P index nagysága jellemzi az illetô iparág vagy üzem minőség-kultúrájának színvonalát. Bhote (1988) szerint a 80-as évek előtt (mielőtt az SPC-módszereket kiterjedten használták volna) az USA iparában a jellemző C_P-érték 0.67 volt, vagyis a gyártott termékek mintegy 4.5%-a az előírásoknak nem felelt meg. A 80-as évek végére a C_P=0.67 értékkel jellemzett minőségű termelés aránya 30% körülire csökkent. Ugyancsak a 80-as évek elején Japánban általánosan a C_P=1.33 értéket írták elő, a high-tech ágazatokban pedig ennél is magasabbat, a Minolta szabványa C_P=2.

7-1. példa

Számítsuk ki a 4-1. példában megismert pörköltkávé-adagoló automata ellenőrző kártyáira kapott becsült paraméterekből a folyamat képességi indexét, ha az előírás 250±5 g!

A várható érték becslése az átlag-kártyán látható, 249.955 g. A variancia becslését a terjedelemre alapozhatjuk, az átlagos terjedelem 2.333, ezt kell az ötelemű mintára érvényes, a függelék V. táblázatából vehető d_2=2.326 értékkel osztani, hogy σ becslését kapjuk, amely így 1.003-nek adódik.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{255-245}{6 \cdot 1.003} = 1.662$$

7-2. példa

A C_P értéke pontbecslés. Indokolt lehet azt is megadni, hogy mekkora intervallumban található az igazi C_P-érték adott biztonsággal, vagyis a konfidenciaintervallumát. A becslés abban áll, és bizonytalansága is abból adódik, hogy a nevezőben szereplő σ helyett annak becslésével számolunk. Ha σ^2 becsléséül az egyesített szórásnégyzetet használjuk, az a 4-1. példában 20, egyenként 5 elemű, tehát 4 szabadsági fokú szórásnégyzetből jön létre, tehát szabadsági fokszáma 80, értéke 0.9643, a szórás ennek négyzetgyöke, azaz 0.982, nem nagyon különbözik a terjedelemből kapott becsléstől.

Az így számított képesség-index:

$$C_P = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{255 - 245}{6 \cdot 0.982} = 1.697 \,.$$

A korrigált tapasztalati szórásnégyzet eloszlása

$s^2 = \dfrac{\chi^2 \sigma^2}{\nu}$, ahol ν a szabadsági fokszám. A helyettesítéssel kapott $\hat{C}_P$ eloszlása

$\hat{C}_P = C_P \dfrac{\sigma}{s} = C_P \sqrt{\dfrac{\nu}{\chi^2}}$, ebből a konfidenciaintervallum:

$$\hat{C}_P \sqrt{\frac{\chi^2_{alsó}}{\nu}} < C_P < \hat{C}_P \sqrt{\frac{\chi^2_{fölsô}}{\nu}} \,.$$

Ha 90%-os biztonságot kívánunk, $\chi^2_{fölsô}$-re a 0.95 valószínűséghez, $\chi^2_{alsó}$-ra a 0.05 valószínűséghez tartozó határt kell vennünk a függelék II. táblázatából; ezek értéke (ν=80-ra) 106.9 ill. 60.4, így a konfidenciaintervallum:

$1.697 \cdot \sqrt{\dfrac{60.4}{80}} < C_P \le 1.697 \cdot \sqrt{\dfrac{106.9}{80}}$, azaz $1.47 < C_P \le 1.96$.

Ez azt jelenti, hogy az index valódi értéke 90 % valószínűséggel 1.47 és 1.96 között van, az intervallum szélessége figyelemreméltó.

Számítsuk most ki a C_P index konfidenciaintervallumát, ha a nevezőjében szereplő σ becslésére nem az egyesített szórásnégyzetet, hanem az átlagos terjedelmet használjuk!
A becslés ekkor

$$\hat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2} \,.$$

Ezt helyettesítve a C_P index képletébe (n=5-re d_2=2.326, a függelék V. táblázatából):

$$C_P = \frac{USL - LSL}{6\overline{R} / d_2} = \frac{255 - 245}{6 \cdot 2.333 / 2.326} = 1.661 \,.$$

Az átlagos terjedelem várható értékének 1-α valószínűségű konfidencia-intervalluma:

$$P\left(\overline{R} - u_{\alpha/2}\sigma_R / \sqrt{m} < E\left(\overline{R}\right) \le \overline{R} + u_{\alpha/2}\sigma_R / \sqrt{m}\right) = 1 - \alpha \,,$$

ahol *m* a minták száma.

Itt a normális eloszlás alkalmazása jogos, nem jelent lényeges elhanyagolást, mert az átlagos terjedelem eloszlása, bármilyen volt is az egyedi terjedelmeké, a centrális határeloszlási tétel értelmében közel normális.
A 4.1. pontban megtárgyaltak szerint egy minta terjedelmének bizonytalanságára igaz, hogy

$$\sigma_R = d_3\sigma .$$

Ennek becslése:

$$\hat{\sigma}_R = d_3\hat{\sigma} = \frac{d_3\overline{R}}{d_2} .$$

Az 5 elemű mintákra d_2=2.326, d_3=0.864, ezzel

$$\hat{\sigma}_R = \frac{0.864 \cdot 2.333}{2.326} = 0.867 .$$

A példa szerinti 90%-os biztonsághoz tartozó $u_{\alpha/2}$=1.65, ezzel

$$P\left(2.333 - 1.65 \cdot 0.867 / \sqrt{20} < E\left(\overline{R}\right) \leq 2.333 - 1.65 \cdot 0.867 / \sqrt{20}\right) =$$

$$= P\left(2.013 < E\left(\overline{R}\right) \leq 2.652\right) = 0.9 .$$

Az átlagos terjedelem várható értékének kapott konfidenciaintervallumát a C_P index képletébe helyettesítve:

$$1.661 \cdot \frac{2.333}{2.652} < C_P \leq 1.661 \cdot \frac{2.333}{2.013}, \text{ azaz } \quad 1.46 < C_P \leq 1.92 .$$

Azt találjuk, hogy gyakorlatilag mindegy, hogy a C_P index és konfidencia-intervallumának számításánál a nevezőjében szereplő σ becslésére az egyesített szórásnégyzetet vagy az átlagos terjedelmet használjuk

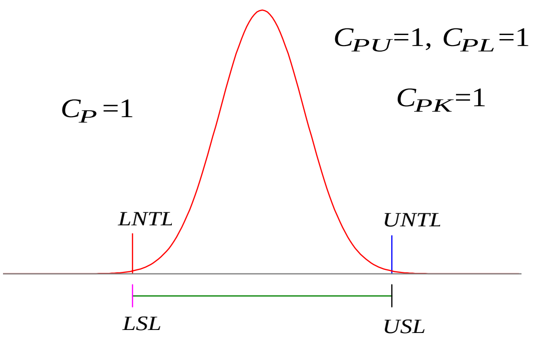
Korrigált minőség-képességi indexek

A C_P mutató definíciójából következő tulajdonsága, hogy nem veszi figyelembe az ingadozás centrumának esetleges eltolódását (7-2/b. ábra). Ezért a következő indexeket is használják:

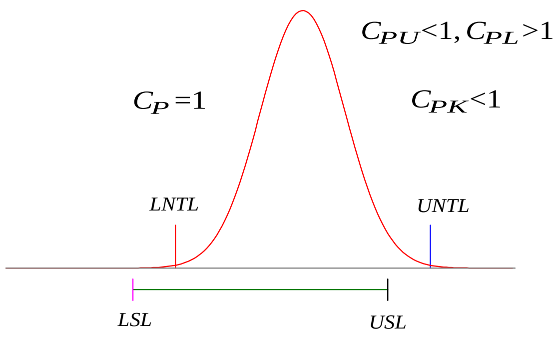
$$C_{PU} = \frac{USL - \mu}{3\sigma},$$

$$C_{PL} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma}.$$

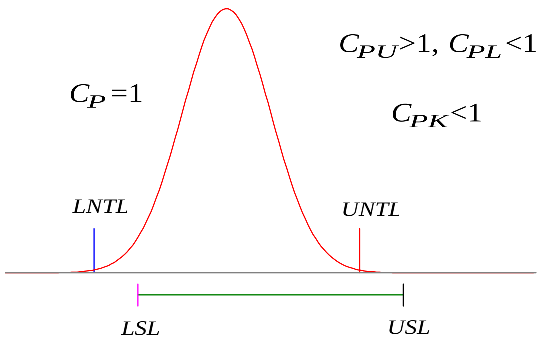
Ha C_{PU}= C_{PL}, az ingadozás centruma éppen a tűrésmező közepe, ekkor a két index nemcsak egymással, hanem C_P értékével is megegyezik. Természetesen, ha $C_{PU} \neq C_{PL}$, az ingadozás centruma nem a tűrésmező közepe. Ha az eltolódás a tűrésmező közepétől mérve pozitív irányú, C_{PU} értéke csökken, C_{PL} értéke nő, és a termék-egyedek számottevő része fölfelé kieshet a tűrésmezőből, amint ez a 7-2. ábrán látható.



a)



b)



c)

7-2. ábra. Magyarázó ábra C_{PU} és C_{PL} szemléltetésére

A minőséget végülis a következő mutató jellemzi jól (*demonstrated excellence*):

$C_{PK} = \min(C_{PU}, C_{PL})$.

A korrigált minőség-képességi indexre igaz, hogy $C_{PK} \le C_P$.

Az indexek kiszámításhoz a μ várható érték és a σ^2 variancia becslésére van szükség. A várható értéket a számtani átlaggal, a varianciát a korrigált tapasztalati szórásnégyzettel, a szórás négyzetével ill. a terjedelemből szokás becsülni és a képletekbe helyettesíteni. Emlékeztetőül, a korrigált tapasztalati szórásnégyzet a következőképpen számítható ki:

$$s^2 = \frac{\sum_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}.$$

Ha nem így számolunk, hanem az egyes mérési adatoknak az előírt T (target) értéktől való eltérésével, egy módosított szórásnégyzetet kapunk:

$$s_m^2 = \frac{\sum_i \left(x_i - T\right)^2}{n-1}.$$

Ezt C_P kifejezésébe helyettesítve egy módosított C_P mutatót kapunk, amelyet C_{Pm}-mel szokás jelölni.

A módosított minőség-képességi index nevezőjében σ helyett τ szerepel:

$$C_{Pm} = \frac{USL - LSL}{6\tau},$$

ahol τ az ún. *MSE*- (mean square error: közepes négyzetes hiba) függvény négyzetgyöke.

A *MSE* függvény definíciója:

$$MSE = E\left[\left(x - T\right)^2\right],$$

vagyis az előírt értéktől való eltérés négyzetének várható értéke; szemben a varianciával, amely $\sigma^2 = E\left[\left(x - \mu\right)^2\right]$, a várható értéktől való eltérés négyzetének várható értéke. A variancia nem függ az előírt értéktől, a *MSE*-függvény igen.

Két részből áll, a varianciából, és a torzítás négyzetéből:

$$\tau^2 = \sigma^2 + \left(\mu - T\right)^2.$$

Vagyis

$$C_{Pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + \left(\mu - T\right)^2}}.$$

A módosított minőség-képességi indexre is igaz, hogy $C_{Pm} \le C_P$.

7-3. példa

Hasonlítsunk össze két folyamatot, mindkettőre az előírás 100±1. Az egyikben legyen

I. σ=0.2, μ=99.5, vagyis az ingadozás centruma eltér a névleges értéktől; a másikban

II. σ=0.4, μ=100, vagyis az ingadozás centruma a névleges érték, csak az ingadozás mértéke nagyobb.

A *MSE* értéke a két folyamatra:

$$\tau^{2(I)} = \sigma^2 + (\mu - T)^2 = 0.2^2 + (99.5 - 100)^2 = 0.29; \quad \tau_I = 0.538$$

$$\tau^{2(II)} = 0.4^2 + (100 - 100)^2 = 0.16; \quad \tau_{II} = 0.4$$

A folyamatképesség indexei a két folyamatra:

$$C_P^I = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{101 - 99}{6 \cdot 0.2} = 1.67; \qquad C_P^{II} = \frac{101 - 99}{6 \cdot 0.4} = 0.83;$$

$$C_{PU}^I = \frac{USL - \mu}{3\sigma} = \frac{101 - 99.5}{3 \cdot 0.2} = 1.25; \qquad C_{PU}^{II} = \frac{101 - 100}{3 \cdot 0.4} = 0.83;$$

$$C_{PL}^I = \frac{\mu - LSL}{3\sigma} = \frac{99.5 - 99}{3 \cdot 0.2} = 0.83; \qquad C_{PL}^{II} = \frac{100 - 99}{3 \cdot 0.4} = 0.83;$$

$$C_{PK}^I = \min\left\{C_{PU}^I, C_{PL}^I\right\} = 0.83; \qquad C_{PK}^{II} = 0.83;$$

$$C_{Pm}^I = \frac{USL - LSL}{6\tau} = \frac{101 - 99}{6 \cdot 0.538} = 0.62; \qquad C_{Pm}^{II} = \frac{101 - 99}{6 \cdot 0.4} = 0.83.$$

7-4. példa

Legyen egy gyártási folyamat valamely jellemzőjének előírt tartománya 100±1, a σ becslése s=0.2. Mekkorák a képességi indexek, és a termék mekkora része lesz kívül a tűrési tartományon (lesz *USL* fölött ill. *LSL* alatt), ha μ becslése 100, 99.5 ill. 100.5?

Az eredmények a 7-1. táblázatban láthatók.

7-1. táblázat

μ	C_P	C_{PU}	C_{PL}	C_{PK}	$u = \frac{USL - \mu}{\sigma}$	>*USL*	$u = \frac{\mu - LSL}{\sigma}$	<*LSL*
100.0	1.67	1.67	1.67	1.67	5.0	$6 \cdot 10^{-7}$	-5.0	$6 \cdot 10^{-7}$
99.5	1.67	2.50	0.83	0.83	7.5	$6 \cdot 10^{-7}$	-2.5	0.0062
100.5	1.67	0.83	2.50	0.83	2.5	0.0062	-7.5	$6 \cdot 10^{-7}$

Folyamat-képesség és folyamat-teljesítmény, rövid és hosszú távú teljesítmény

A folyamatképességet gyakran nem egyetlen mintából, hanem minták egymásutánjából elemzik. Ilyenkor a varianciát lehet az összes adatokból is becsülni, de lehet az egyes mintákra kapott becslések egyesítésével is. A kétféle számolás eredménye csak akkor egyezik meg, ha a folyamat stabil, vagyis csak véletlen ingadozások vannak, az egyes minták között rendszeres eltérés (ún. veszélyes hiba) nincs.

Ha az előbbi utat járjuk, vagyis a varianciát az összes adatokat egy mintának kezelve becsüljük, a becsült variancia a mintákon belüli ingadozást és a minták közötti különbségeket egyaránt tükrözi. Az így számított mutatókat C_P helyett P_P (P_{PK} stb.) jelöli és folyamat-teljesítmény (*process performance*) index a nevük.

Ha az ellenőrző kártyáknál megismert módon a mintákon belüli eltérésekből becsüljük a varianciát (pl. a minták terjedelmének átlagolásával), a folyamat belső, véletlenszerű ingadozására jellemző C_P mutatókat kapjuk, szűkebb értelemben ezeket nevezik folyamatképességi (*process capability*) indexeknek.