Mi annak valószínűsége, hogy az első minta alapján visszautasítsuk a tételt?

Ehhez az szükséges, hogy $D_1 \geq r_2$, vagyis itt $D_1 \geq 4$ legyen, melynek valószínűsége:

$$P_r^I = 1 - P(D_1 \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - 0.9913 = 0.087\,.$$

Mi annak valószínűsége, hogy a második minta alapján fogadjuk el a tételt?

Ez csak akkor lehetséges, ha egyáltalán szükség volt a második mintára, vagyis $c_1 < D_1 < r_2$, itt $1 < D_1 < 4$, azaz D_1 értéke 2 vagy 3. Ha D_1=2, D_2 értéke 0 vagy 1 lehet, hogy pozitív legyen a két minta együttese alapján hozandó döntés ($D_1 + D_2 < 4$). A kérdéses valószínűségek:

$$P(D_1 = 2 \text{ és } D_2 = 0) = 0.1443 \cdot 0.4475 = 0.0646\,,$$
$$P(D_1 = 2 \text{ és } D_2 = 1) = 0.1443 \cdot 0.3616 = 0.0522\,,$$
$$P(D_1 = 3 \text{ és } D_2 = 0) = 0.0379 \cdot 0.4475 = 0.0170\,.$$

E valószínűségek összege:

$$P_a^{II} = 0.0646 + 0.0522 + 0.0170 = 0.1338\,.$$

Általánosabban $P_a^{II} = \sum_{i=c_1+1}^{r_2-i} \left[P_{n_1}(i) \cdot \sum_{j=0}^{r_2-i} P_{n_2}(i) \right].$

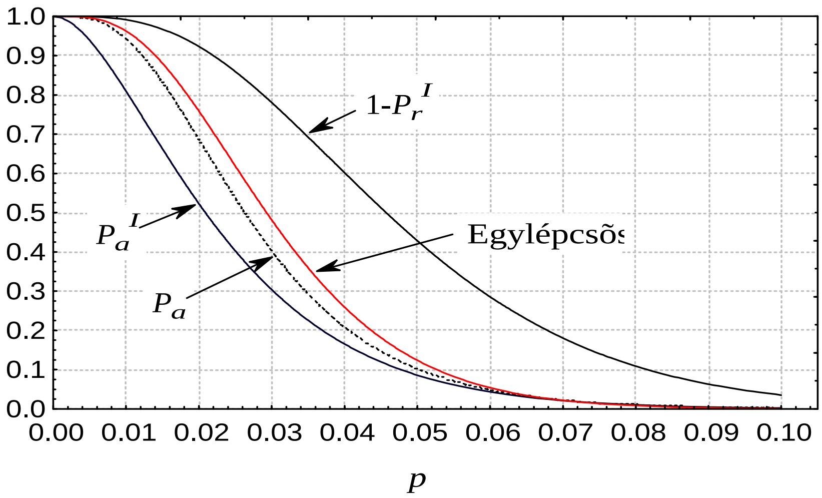
Annak valószínűsége, hogy akár az elsô, akár a második minta alapján átvegyük a tételt:

$$P_a = P_a^I + P_a^{II} = 0.8091 + 0.1338 = 0.9429\,.$$

A 10-5. példa szerinti kétlépcsős mintavételi terv jelleggörbéjét mutatja a 10-9. ábra.

A folytonos vonal annak P_a^I valószínűségét mutatja, hogy már az első minta alapján átvegyük a tételt. A szaggatott vonal annak $1 - P_r^I$ valószínűségét ábrázolja, hogy az első minta alapján még ne utasítsuk el, a pontozott vonal pedig annak P_a valószínűségét, hogy valamelyik döntési pontnál elfogadjuk.

Az ábrán föltüntettük az ekvivalens (ugyanazon kulcsjelhez tartozó) egylépcsős ellenőrzés jelleggörbéjét is, ez az eljárás 125 elemű mintát igényel, az átvételi határ *Ac*=3, a visszautasítási szám *Re*=4. Látható, hogy a két jelleggörbe szerinti P_a elfogadási valószínűségek bármely *p*-nél (tételbeli selejtaránynál) igen közeliek egymáshoz, vagyis a két terv statisztikai biztonsága jó közelítéssel azonos. A kétlépcsős mintavétel esetén e biztonsághoz vagy 80, vagy 160 mintaelem szükséges, az egylépcsősnél 125.



10-9. ábra. A 10-5. példa szerinti kétlépcsős mintavételi terv jelleggörbéje a 10-6. példához

10.4.3. Átlagos mintaelemszám

A kétlépcsős mintavétel akkor gazdaságos, ha nagy valószínűséggel összesen kisebb minta vétele elegendő, mint a hasonló statisztikai biztonságot kínáló egylépcsős eljárásnál. Az átlagos mintaelemszám (*ASN*: average sample number, tulajdonképpen valószínűséggel súlyozott átlag) a következő képlettel számítható ki:

$$ASN = n_1\left(P_a^I + P_r^I\right) + \left(n_1 + n_2\right)\left(1 - P_a^I - P_r^I\right) = n_1 + n_2\left(1 - P_a^I - P_r^I\right)$$

Annak valószínűsége, hogy már az első mintából döntésre jussunk, $P_a^I + P_r^I$. Az első tag (P_a^I) annak valószínűsége, hogy az első minta alapján átvegyük a tételt, a második tag (P_r^I) azé, hogy visszautasítsuk.

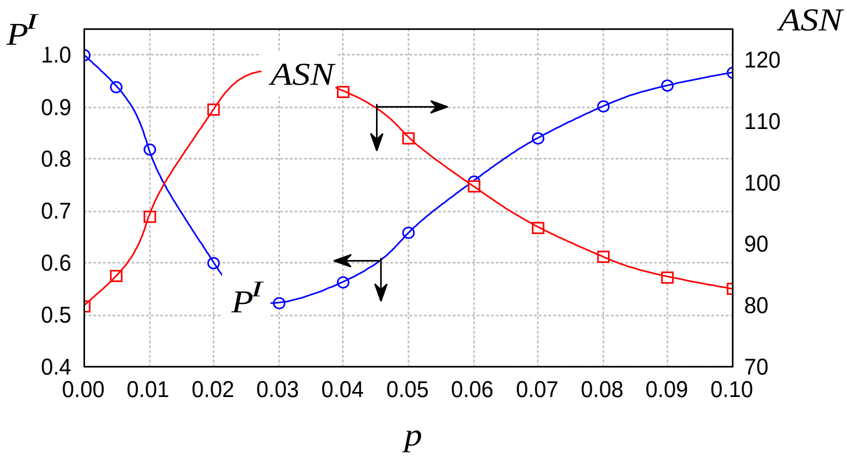
10-7. példa

Számítsuk ki a 10-5. példa szerinti ellenőrzési terv átlagos mintaelemszámát (Az első minta 80, a második is 80 elemű, c_1=1, r_1=c_2=4), ha p_0=0.01!

$$P_a^I + P_r^I = 1 - P\left(1 < D_1 < 4\right) = 1 - \left[F(3) - F(1)\right] = 1 - 0.9913 + 0.8091 = 0.8178$$

$$ASN = n_1 + n_2\left(1 - P_a^I - P_r^I\right) = 80 + 80 \cdot \left(1 - 0.8178\right) = 94.6$$

Az átlagos mintanagyság *p* más értékeihez is kiszámítható, ezeket mutatja a 10-10. ábra. Az egyik görbén a $P^I = P_a^I + P_r^I$ valószínűség látható, a másik az *ASN*-görbe.



10-10. ábra. Az ASN-görbe és számítása

Látható az ábrából, hogy amennyiben $p \le p_0$, $P^I \ge 0.82$ valószínűséggel már az első minta alapján dönthetünk (és átvesszük a tételt). Hasonlóan nagy valószínűséggel hozhatunk döntést az első minta alapján, ha p sokkal nagyobb p_0-nál (például $p_0 \ge 0.08$-ra $P^I \ge 0.9$), természetesen ilyenkor visszautasítjuk a tételt. Az átlagos mintanagyság maximuma p=0.03-nál van. Ekkor $P^I \approx 0.52$ a valószínűsége annak, hogy már az első minta alapján döntésre jutunk. Az átlagos mintaelemszám azonban még ebben a legrosszabb esetben is kisebb (*ASN*=118) az ekvivalens egylépcsős eljárás szükséges mintaelemszámánál (n=125).

Vagyis ha a selejtarány jóval kisebb vagy jóval nagyobb az *AQL* névleges értéknél, nagy valószínűséggel már az első minta alapján dönthetünk, így az átlagos mintaelemszám alig haladja meg az első mintáét, és még a legkedvezőtlenebb esetben is alatta marad az egylépcsős eljárás szükséges mintaelemszámának. Mindez persze csak sok tétel (sok vizsgálat) átlagára igaz, ezért átlagos mintaelemszámról beszélünk.

Az itt ismertetett szabványban (MSZ 548-77, ISO 2859-1, MIL STD 105D) az első és második minta elemszáma mindig azonos, így az átlagos összes mintaelemszám (ASN) mindig kisebb, mint az ekvivalens (azonos statisztikai biztonságú) egylépcsős tervé.
A szabvány korábbi változatában a második minta elemszáma az elsőének kétszeres volt, a következő példa illusztrálja ennek előnytelen voltát.

10-8. példa

Legyen a kétlépcsős mintavételi terv szerint az elsô minta 80, a második 160 elemű, továbbá c_1=1, r_1=c_2=5.

Annak valószínűsége, hogy az első minta alapján pozitív döntést hozzunk, amennyiben p=0.01:

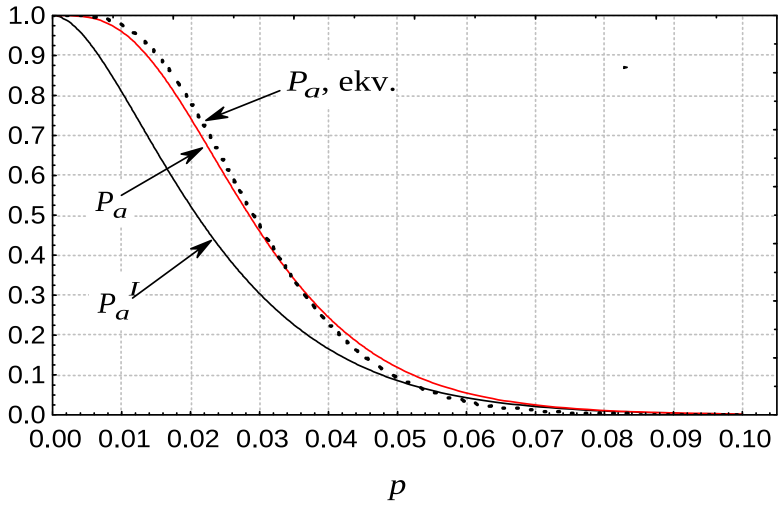
$$P_a^I = P\left(D_1 = 0\right) + P\left(D_1 = 1\right) = F\left(1\right) = 0.8091.$$

Annak valószínűsége, hogy az első minta alapján pozitív vagy negatív döntést hozzunk:

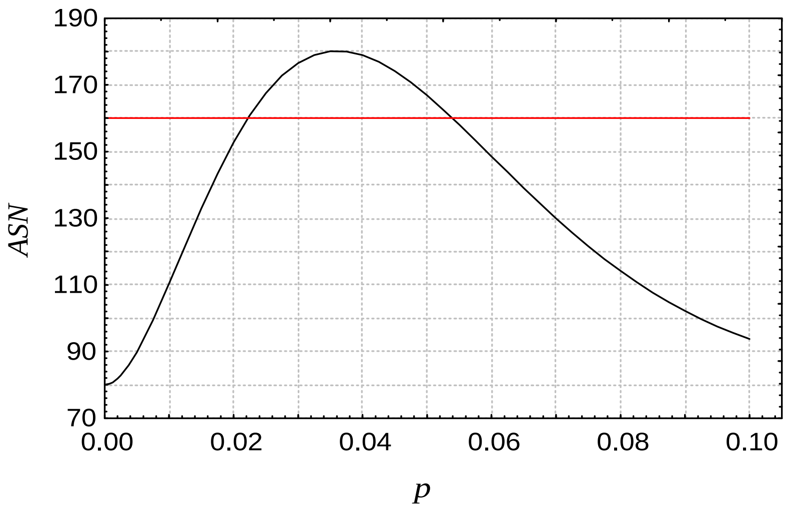
$$P_a^I + P_r^I = 1 - P(1 < D_1 < 5) = 1 - [F(4) - F(1)] = 1 - 0.9987 + 0.8091 = 0.8104,$$

$$ASN = n_1 + n_2(1 - P_a^I - P_r^I) = 80 + 160 \cdot (1 - 0.8104) = 110.3.$$

Ugyanígy többféle *p* értékhez kiszámíthatjuk e valószínűségeket ill. az átlagos mintaelemszámot. A jelleggörbét mutatja a 10-11. ábra, melyen föltüntettük az ekvivalens (azonos statisztikai biztonságot nyújtó) egylépcsős terv OC-görbéjét is. Az utóbbi terv 160 elemű mintát igényel, átvételi határa *c*=4.



10-11. ábra. A 10-8. példa szerinti kétlépcsős és az ekvivalens egylépcsős mintavételi terv jelleggörbéje



10-12. ábra. Az ASN-görbe a 10-8. példában

Látható, hogy az ilyen kétlépcsős terv (ahol n_2=2n_1) csak nagyon kis és nagyon nagy p értékeknél gazdaságos, mert ott kisebb *ASN*. Az n_2=n_1 választásnál *ASN* mindenütt kisebb az egylépcsős eljárás mintaelemszámánál.

10.4.4. A kétlépcsős ellenőrzés előnyei és hátrányai

Előnye

- ha a várt hiba-aránytól nagy az eltérés (a tétel sokkal jobb vagy sokkal rosszabb minőségű a feltételezettnél), ezt jóval kevesebb minta vételével is kimutathatjuk.

Hátrányai

- bizonyos terveknél, ha az első minta alapján nem tudunk döntést hozni, a két minta együttes elemszáma nagyobb a hasonló statisztikai biztonságú egylépcsős ellenőrzéshez szükséges mintaelemszámnál (a szabvány azonban nem ilyen terveket ír elő);
- bonyolultabb a szervezése, adminisztrációja, mint az egylépcsős eljárásé;
- tárolási és kezelési szempontból nehézkesebb, ha a második minta vételére (ill. az annak szükségességére vonatkozó döntésre) várni kell
- ha a mintavételt követő vizsgálat éppen tárolási próba, a második minta már mindenképpen hosszabb ideig áll.