2. A statisztikai következtetés

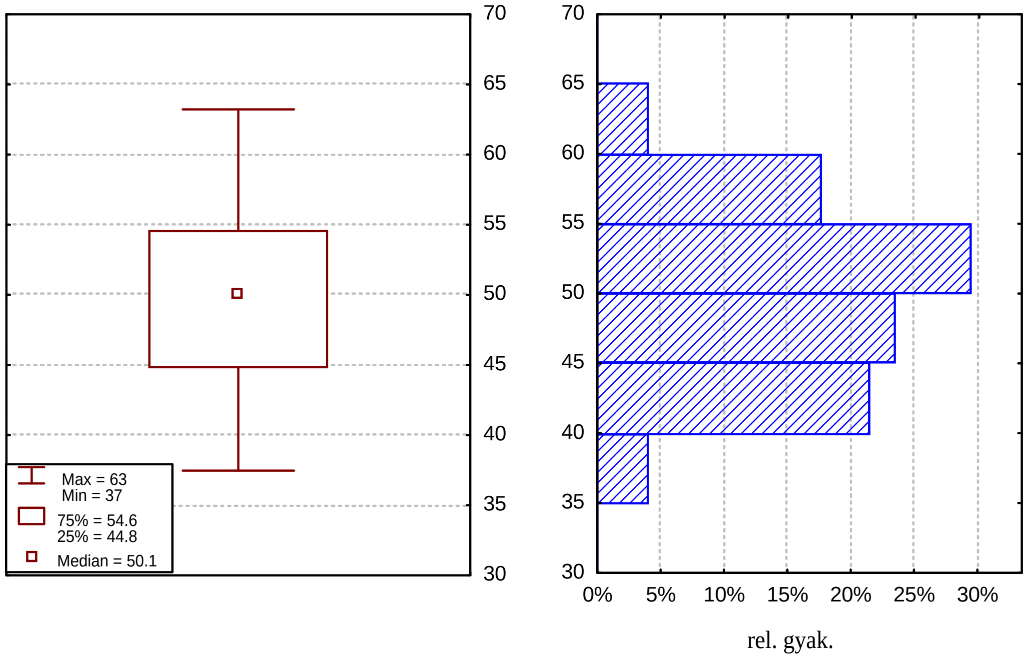
Az 1. fejezetben láttuk, hogy az eloszlás ismeretében képet alkothatunk a folyamat eredményéről, pl. a selejtarányról, vagy arról, milyen valószínűséggel kapunk adott tűréshatárok közötti méretű alkatrészeket. A valóságban a folyamat (az eloszlás) paraméterei ismeretlenek, ezért a matematikai statisztika módszereivel következtetünk a minta statisztikai jellemzőiből a sokaság eloszlásának paramétereire. A következtetésnek két fő módszere van: a becslés és a hipotézisvizsgálat. Ebben a fejezetben e módszereknek a mérési adatok feldolgozása és a minőségszabályozás szempontjából elsődlegesen fontos vonatkozásait ismertetjük.

2.1. A minta statisztikai jellemzői

Ebben az alfejezetben áttekintjük a véletlen minta statisztikai jellemzőinek eloszlását és a sokaság paramétereivel való kapcsolatukat.

A minta akkor hasznosítható statisztikai következtetésre, ha véletlen minta. A véletlenszerűség itt azt jelenti, hogy a mintavétel során nem érvényesítünk szándékosságot, így pl. egy véges sokaság bármely elemének egyforma esélye van arra, hogy kiválasszuk. A véletlen mintából statisztikai jellemzőket számolunk ki (pl. átlag, szórásnégyzet, selejtarány), melyeket statisztikáknak is nevezünk. Ha ismerjük a sokaság eloszlását (az eloszlás típusát és paramétereit), megkaphatjuk a mintabeli jellemzők eloszlását is.

Általában célszerű az adatokat ábrázolni, mert rögtön képet alkothatunk az eloszlás jellegéről. A vizuális benyomás sugallja az elvégzendő statisztikai vizsgálatokat is.



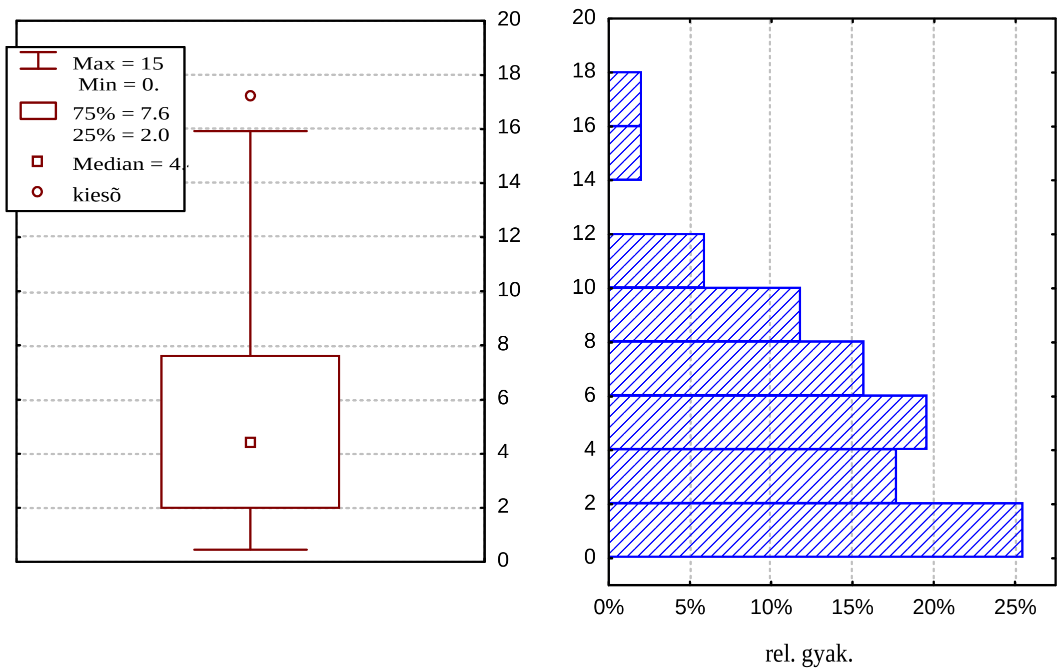
a) *b*)

2-1. ábra. *a*) Dobozos ábra és *b*) hisztogram szimmetrikus eloszlásból vett mintára

A mintabeli adatatok grafikus megjelenítésének egyik elterjedt módja a dobozos ábra (box-plot ill. box-and-whisker plot). A 2-1*a*) ábrán 51 elemű minta dobozos ábráját mutatjuk be, a mellette lévő 2-1*b*) ábrán pedig ugyanennek a mintának a gyakorisági hisztogamját láthatjuk.

A 2-1*a*) ábrán a vízszintes vonalak a szélső értékekig tartanak, ha nincs kiugró érték. A dobozban lévő négyzet a tapasztalati medián (aminél kisebb és nagyobb értékeket egyforma gyakorisággal vesz föl a változó, az ábrán értéke 50.1). A minimum és a doboz alsó vonala által határolt intervallumban (37; 44.8) van az adatok 25%-a (alsó kvartilis: Q_1). Ugyancsak az adatok 25%-a található a doboz fölső vonala és a maximális érték közötti tartományban (54.6; 63, fölső kvartilis: Q_3).

A bemutatott ábrázolás jól használható tetszőleges eloszlású sokaságból vett minta ábrázolására, mivel az ilyen ábrázolásnál könnyen észlelhető az eloszlás esetleges aszimmetriája is. Erre látunk példát a 2-2*a*) ábrán, a 2-2*b*) ábra pedig a mintabeli adatok relatív gyakorisági hisztogramját mutatja.



a) *b*)

2-2. ábra. *a*) Dobozos ábra és *b*) hisztogram aszimmetrikus eloszlásból vett mintára

A dobozos ábrák egyszerűen elkészíthetők, a hisztogramokkal ellentétben viszonylag kis elemszámú mintára is használhatók.

2.1.1. A számtani középérték

A számtani középérték definíciója

Képzeljünk el egy tetszőleges eloszlású sokaságból vett n elemű mintát! Elemeinek számtani középértéke:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + ... + x_n\right) = \frac{1}{n}\sum x_i \ , \tag{2.1}$$

ahol x_1 , x_2 , ..., x_n a valószínűségi változók, a minta elemei; $\bar{x}$ természetesen maga is valószínűségi változó. Mivel a minta elemei ugyanazon alapsokaságból származnak, várható értékük ill. varianciájuk azonos.

A számtani közép várható értéke:

$$E(\bar{x}) = \frac{1}{n}\left[E\left(x_1\right) + E\left(x_2\right) + \cdots + E\left(x_n\right)\right] = \frac{1}{n}\left[nE(x)\right] = E(x) = \mu \ . \tag{2.2}$$

A számtani középérték varianciája:

$$Var(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}\left[Var\left(x_1\right) + Var\left(x_2\right) + \cdots + Var\left(x_n\right)\right] = \frac{1}{n^2}nVar(x) = \frac{Var(x)}{n} \ . \tag{2.3}$$

Látható, hogy a számtani közép várható értéke azonos a minta egy elemének várható értékével, varianciája pedig az egy elem varianciájának n-ed része, bármiféle eloszlású sokaságból vett mintáról legyen is szó.

2-1. példa

Ha egy $\mu = 10$ várható értékű és $\sigma^2 = 0.25$ varianciájú sokaságból $n = 5$ elemű mintát veszünk, milyen intervallumban lesz a mintaelemek átlaga 95% valószínűséggel? Hogyan viszonylik ez a tartomány ahhoz az intervallumhoz, amelyben a mintaelemek 95% valószínűséggel vesznek föl értékeket?

$$P\left(\mu - u_{\alpha/2}\sigma / \sqrt{n} < \bar{x} \le \mu + u_{\alpha/2}\sigma / \sqrt{n}\right) = 1 - \alpha$$

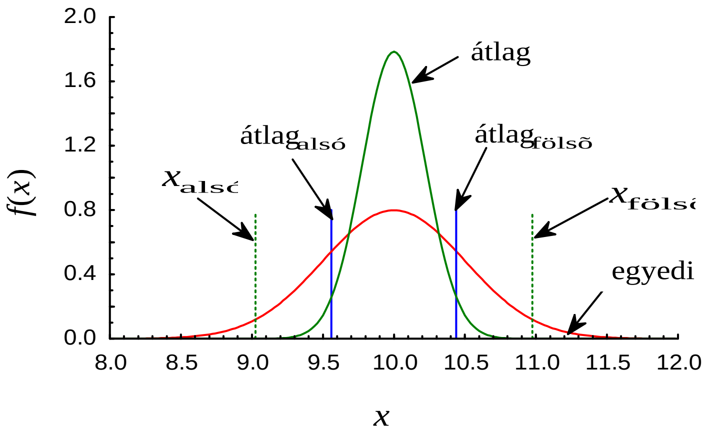
A Függelék I. táblázatából $\alpha = 0.05$ valószínűséghez $u_{\alpha/2} = 1.96$.

$$P\left(10 - 1.96 \cdot 0.5 / \sqrt{5} < \bar{x} \le 10 + 1.96 \cdot 0.5 / \sqrt{5}\right) = P\left(9.56 < \bar{x} \le 10.44\right) = 0.95 \, ,$$

vagyis az átlag a véletlen ingadozás következtében 9.56 és 10.44 közötti értékeket vesz föl 95% valószínűséggel.

Az egyedi értékekre a 95% valószínűségű intervallum:

$$P(10 - 1.96 \cdot 0.5 < \bar{x} \le 10 + 1.96 \cdot 0.5) = 0.95, \quad P(9.02 < \bar{x} \le 10.98) = 0.95 \, .$$



2-3. ábra. Egyedi érték és átlagérték sűrűségfüggvénye és 95%-os valószínűséghez tartozó intervalluma

Az egyedi értékekre az ingadozás intervalluma jóval szélesebb. A 2-3. ábra mutatja normális eloszlás esetén az egyetlen mintaelem és az ötelemű minta átlagának sűrűségfüggvényét.

2.1.2. A centrális határeloszlási tétel

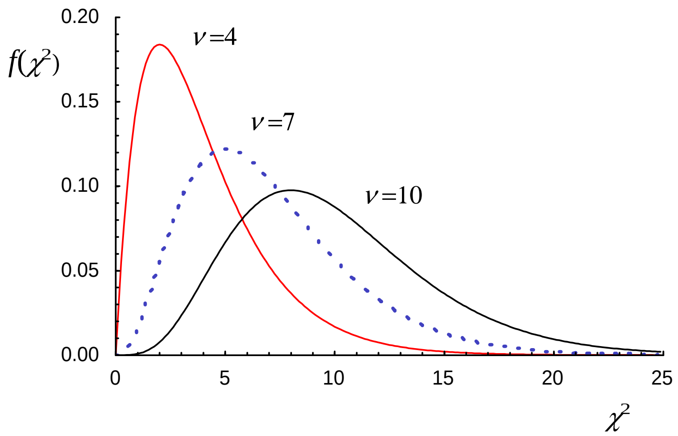
Bármilyen eloszlású sokaságból vett minták számtani középértéke közelítőleg normális eloszlást követ az eredeti eloszlás várható értéke körül, varianciájuk pedig σ^2/n. Tehát az $\bar{x}$ $N\left(\mu, \sigma^2/n\right)$ eloszlású valószínűségi változó, vagyis az $u = \dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ $N(0, 1)$ eloszlású. Ha az eredeti eloszlás szimmetrikus, már négy elemű mintára is jó a közelítés, és általánosan egyre javul a mintaelemszám növekedésével.

2.1.3. A normális eloszlású minta szórásnégyzetének eloszlása: χ^2- (khi-négyzet-) eloszlás

Vegyünk egy $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ normális eloszlású sokaságból n elemű mintát: x_1, x_2, ..., x_n! Ezekből az $u = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ normalizált normális eloszlású [$N(0, 1)$] valószínűségi változók képezhetők. A χ^2-eloszlású valószínűségi változót a következőképpen kapjuk:

$$\chi^2 = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \,. \tag{2.4}$$

A négyzetösszeg ν szabadsági fokán az (u_1, u_2,..., u_n) lineáris rendszer szabadsági fokát értjük. A lineáris rendszer szabadsági fokát megkapjuk, ha a változók számából levonjuk a köztük lévő lineáris összefüggések számát. Mivel itt a tagok egymástól függetlenek, az összeadandók száma (n) megegyezik a szabadsági fokkal. Az eloszlás sűrűségfüggvénye csak a ν paramétert tartalmazza: $f_\nu\left(\chi^2\right)$, rajza a 2-4. ábrán látható.



2-4. ábra. A χ^2-eloszlás sűrűségfüggvénye különböző szabadsági fokhoz

A Függelék II. táblázatában a különféle α valószínűségekhez és ν szabadsági fokhoz tartozó χ^2_α kritikus értékek vannak feltüntetve.

A χ^2-eloszlású valószínűségi változó várható értéke:

$$E\left(\chi^2\right)=E\left(\sum_{i=1}^{\nu}u_i^2\right)=\sum_{i=1}^{\nu}E\left(u_i^2\right)=\sum_{i=1}^{\nu}E\left[\left(u_i-0\right)^2\right]=\sum_{i=1}^{\nu}Var\left(u_i\right)=\nu\,. \tag{2.5}$$

Varianciája:

$$Var\left(\chi^2\right)=2\nu\,. \tag{2.6}$$

A χ^2-eloszlás felbontási tétele (Fisher–Cochran-tétel)

Legyen fölbontva k számú kifejezés összegére a ν szabadsági fokú χ^2-eloszlású négyzetösszeg:

$$\sum_{i=1}^{\nu}u_i^2=Q_1+Q_2+\ldots+Q_j+\ldots+Q_k\,, \tag{2.7}$$

ahol a Q_j-k ($j=1\ldots k$) maguk is $N(0,\,1)$ eloszlású valószínűségi változók lineáris kifejezéseinek négyzetösszegei ν_j szabadsági fokkal. Ekkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a Q_j négyzetösszegek függetlenek és ν_j paraméterű χ^2-eloszlásúak legyenek az, hogy a Q_j négyzetösszegek ν_j szabadsági fokok összege egyenlő legyen a bal oldalon álló négyzetösszeg ν szabadsági fokával:

$$\nu=\sum_{j=1}^{k}\nu_j\,. \tag{2.8}$$

Például: legyenek az x_i valószínűségi változók normális eloszlásúak, μ várható értékkel és σ^2 varianciával; ekkor

$$\chi^2 = \sum_i \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2 . \tag{2.9}$$

A közös σ^2-tel mindkét oldalt szorozva $\chi^2\sigma^2$ eloszlású kifejezést kapunk:

$$\chi^2\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - \mu) \right]^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2 , \tag{2.10}$$

ugyanis

$$2\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(\bar{x} - \mu) = 2(\bar{x} - \mu)\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}) = 0 , \tag{2.11}$$

mert $\sum_i (x_i - \bar{x}) = \sum_i x_i - n\bar{x} = 0$.

A kiindulási négyzetösszeg $\chi^2\sigma^2$ eloszlású $\nu = n$ szabadsági fokkal, az algebrai felbontás után kapott Q_1 és Q_2 kifejezések is $\chi^2\sigma^2$ eloszlásúak lesznek $n-1$, ill. 1 szabadsági fokkal és egymástól függetlenek.

A Q_1 eltérés-négyzetösszeg szabadsági foka azért $n-1$, mert n számú összeadandót tartalmaz ugyan, de ezek közül csak $n-1$ független, ugyanis

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i}{n} ,$$

ezért az $(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \ldots + (x_n - \bar{x}) = 0$ összefüggés érvényes közöttük.

Ne higgyük, hogy a felbonthatóság feltétele mindig teljesül! Például a következő felbontás esetén nem:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \bar{x})^2 + (x_n - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2 .$$

$$\nu_1 = n - 1, \qquad \nu_2 = 1, \qquad \nu_3 = 1$$

Az első négyzetösszeg szabadsági foka azért $n-1$, mert $n-1$ összeadandót tartalmaz, amelyek között nincs kapcsolat (mivel $x_1, \ldots, x_{n-1}$ és $\bar{x}$ között nincs kapcsolat). Így a felbontás során kapott három négyzetes kifejezés nem mindegyike $\chi^2\sigma^2$ eloszlású, és nem mind független egymástól.

A felbontási tétel megfordításaként hasonló addíciós tétel is érvényes.

A normális eloszlású sokaságból vett minta tapasztalati szórásnégyzetének eloszlása

A korrigált tapasztalati szórásnégyzet definíciója:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \qquad (2.12)$$

A (2.10) egyenletből látható, hogy a $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2$ négyzetösszeg $\chi^2\sigma^2$ eloszlású, $\nu = n-1$ szabadsági fokkal, várható értéke:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2\right] = \sigma^2 E\left(\chi^2\right) = \sigma^2 (n-1)\,. \qquad (2.13)$$

A (2.12) egyenlettel definiált korrigált tapasztalati szórásnégyzet várható értéke a σ^2 variancia:

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \Big/ (n-1)\right] = \sigma^2 E\left(\chi^2\right) \Big/ (n-1) = \sigma^2\,. \qquad (2.14)$$

Így a korrigált tapasztalati szórásnégyzet $\chi^2\sigma^2/\nu$ eloszlású, vagy másképpen az $s^2\nu/\sigma^2$ kifejezés χ^2-eloszlású $\left(\chi^2 = s^2\nu/\sigma^2\right)$, $\nu = n-1$ szabadsági fokkal.

2-2. példa

Egy $\sigma^2 = 0.08$ varianciájú normális eloszlású sokaságból 8 elemű mintát veszünk.

a) Határozzuk meg azt az intervallumot, amelyben az s^2 korrigált tapasztalati szórásnégyzet 95%-os valószínűséggel megtalálható!

$$P\left(s_{\text{alsó}}^2 < s^2 \le s_{\text{fölsõ}}^2\right) = 0.95$$

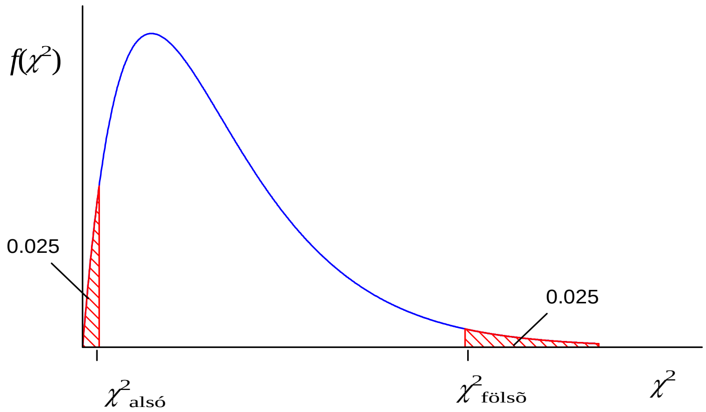
$$P\left(s_{\text{alsó}}^2 < \frac{\chi^2\sigma^2}{\nu} \le s_{\text{fölsõ}}^2\right) = P\left(\frac{s_{\text{alsó}}^2\nu}{\sigma^2} < \chi^2 \le \frac{s_{\text{fölsõ}}^2\nu}{\sigma^2}\right) = P\left(\chi_{\text{alsó}}^2 < \chi^2 \le \chi_{\text{fölsõ}}^2\right) = 0.95$$

Annak valószínűsége, hogy $\chi^2 < \chi_{\text{alsó}}^2$, legyen 0.025, azé pedig, hogy $\chi^2 \le \chi_{\text{fölsõ}}^2$, legyen 0.975. ν = 7 szabadsági fokra a Függelék II. táblázatából $\chi_{\text{alsó}}^2 = 1.69$; $\chi_{\text{fölsõ}}^2 = 16.0$. Így

$$P\left(\chi_{\text{alsó}}^2 < \chi^2 \le \chi_{\text{fölsõ}}^2\right) = P\left(\frac{\chi_{\text{alsó}}^2\sigma^2}{\nu} < s^2 \le \frac{\chi_{\text{fölsõ}}^2\sigma^2}{\nu}\right) =$$

$$= P\left(\frac{1.69 \cdot 0.08}{7} < s^2 \le \frac{16.0 \cdot 0.08}{7}\right) = P\left(0.0193 < s^2 \le 0.183\right) = 0.95$$

Vegyük észre, hogy a szórásnégyzet milyen széles tartományban ingadozhat, pusztán a véletlen következtében!



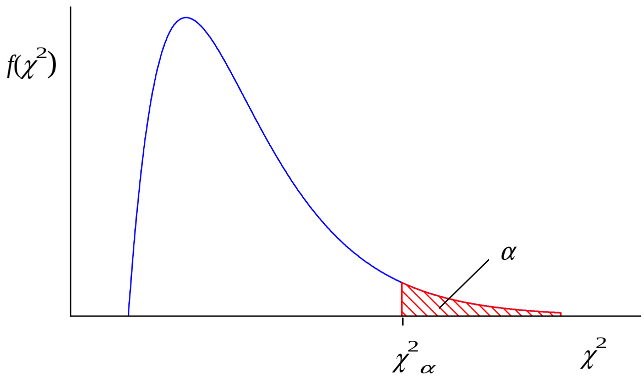
2-5*a*) ábra. A χ^2-eloszlás kritikus értékei

b) Határozzuk meg azt az értéket, amelyet s^2 95%-os valószínűséggel nem halad meg!

$P\left(s^2 \le s_{\text{fölsõ}}^2\right) = 0.95$

A II. táblázatból $\chi_{\text{fölsõ}}^2 = 14.1$

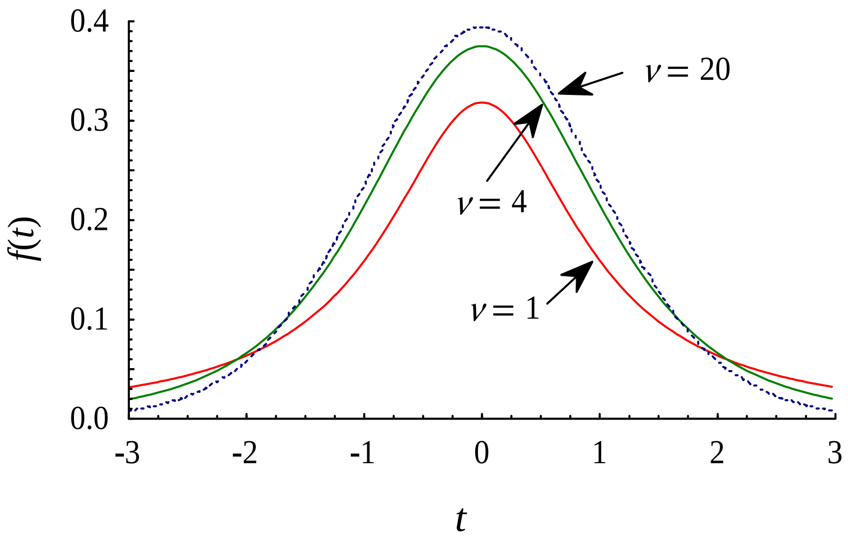
$$P\left(s^2 \le \frac{\chi_{\text{fölsõ}}^2\sigma^2}{\nu}\right) = P\left(s^2 \le \frac{14.1 \cdot 0.08}{7}\right) = P\left(s^2 \le 0.161\right) = 0.95$$



2-5*b*) ábra. A χ^2 eloszlás α valószínűséghez tartozó fölső kritikus értéke

2.1.4. *t*-eloszlás (Student-eloszlás)

Az *u*-eloszlás sokszor nem használható, ha a minta elemszáma kicsi, és nincs bőséges előzetes adathalmazunk a σ^2 variancia becslésére (csak kis számú ismétlés szórásnégyzetével helyettesíthetjük). Ilyen esetekben alkalmazandó a *t*-eloszlás (2-6. ábra).



2-6. ábra. A *t*-eloszlás sűrűségfüggvénye különböző szabadsági fokhoz

Egy ξ normális eloszlású valószínűségi változóból a következő kifejezéssel kapunk Student-féle t-eloszlásút:

$$t = \frac{u}{\sqrt{\frac{\chi^2}{\nu}}} = \frac{\xi - E(\xi)}{\sqrt{\frac{\chi^2 \sigma_\xi^2}{\nu}}} = \frac{\xi - E(\xi)}{s_\xi}. \qquad (2.15)$$

Az eloszlás egyetlen paramétere a szabadsági fokok száma, ν, amely a nevezőben lévő szórás négyzetének a szabadsági fokszáma.

Várható értéke: $E(t) = 0$. (2.16)

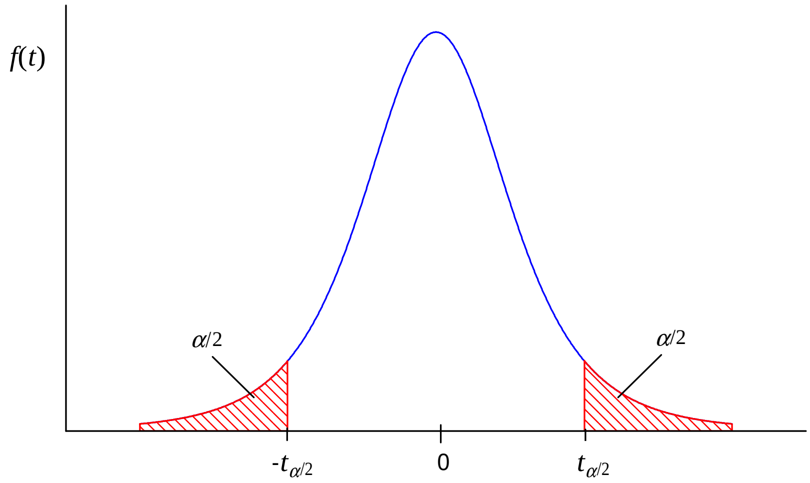
A 2-6. ábrán a ν = 1, 4 és 20 szabadsági fokokhoz tartozó sűrűségfüggvényeket ábrázoltuk. Ha $\nu \to \infty$, a t-eloszlás közeledik a normális eloszláshoz. A gyakorlatban a $\nu > 30$ esetén a t-eloszlást normális eloszlással helyettesíthetjük.

Származzék például a t valószínűségi változó az n elemű minta középértékéből. A következő valószínűségi változó t-eloszlású, n – 1 szabadsági fokkal:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}. \tag{2.17}$$

A Függelék III. táblázatában a különféle α valószínűségekhez és ν szabadsági fokhoz tartozó $t_{\alpha/2}$ kritikus értékek vannak feltüntetve. Mivel a t-eloszlás szimmetrikus, az alsó kritikus értéket $-t_{\alpha/2}$-lel szokás jelölni.

A t valószínűségi változó α valószínűséggel veszi föl a ($-t_{\alpha/2}$, $t_{\alpha/2}$) intervallumon kívül eső értékeket (2-7. ábra).



2-7. ábra. A t-eloszlás kritikus értékei

2-3. példa

10 mérés eredménye a következő: 24.46; 23.93; 25.79; 25.17; 23.82; 25.39; 26.54; 23.85; 24.19; 25.50.

$$\bar{x} = 24.864; \quad s^2 = 0.89422; \quad s = 0.946$$

Ne feledjük, hogy s nem a középérték szórása, hanem az egyedi mért értéké!
Kérdés: milyen intervallumban van a valódi érték 95%-os valószínűséggel?

$$P\left(-t_{\alpha/2} < t \le t_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha, \qquad t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}},$$

$$P\left(\bar{x} - t_{\alpha/2}\, s\big/\sqrt{n} < t \le \bar{x} + t_{\alpha/2}\, s\big/\sqrt{n}\right) = 1 - \alpha\,.$$

A III. táblázatból $\alpha = 0.05$ és $\nu = n - 1 = 9$ értékekhez $t_{\alpha/2} = 2.262$.

$$\frac{t_{\alpha/2} s}{\sqrt{n}} = \frac{2.262 \cdot 0.946}{\sqrt{10}} = 0.677\,, \qquad P\left(24.29 < \mu \le 25.64\right) = 0.95\,.$$

Tehát a 95%-os konfidencia-intervallum: (24.29, 25.64).

2.1.5. *F*-eloszlás

Legyen χ_1^2 és χ_2^2 két, egymástól független, χ^2 -eloszlású valószínűségi változó ν_1, ill. ν_2 szabadsági fokkal. A következő kifejezés *F*-eloszlású, a számláló szabadsági foka ν_1, a nevezőé ν_2:

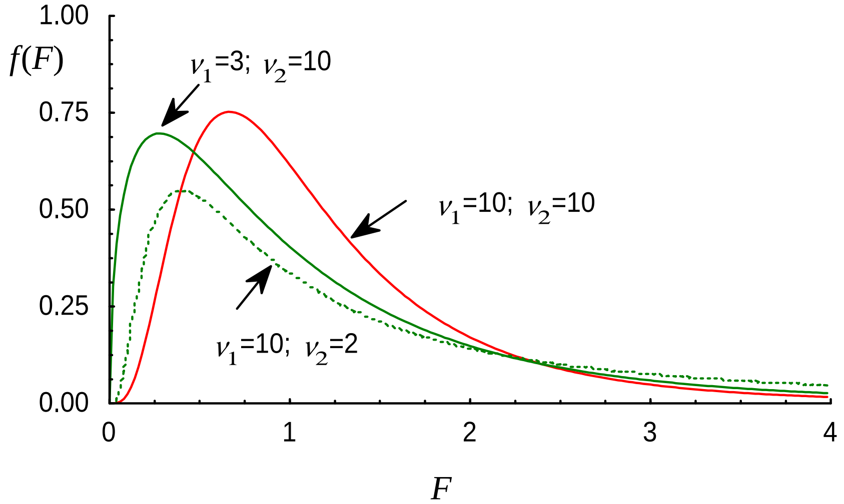
$$F = \frac{\chi_1^2 \big/ \nu_1}{\chi_2^2 \big/ \nu_2}\,. \tag{2.18}$$

Figyelembe véve, hogy $\dfrac{s^2}{\sigma^2}\nu = \chi^2$; $\dfrac{s^2}{\sigma^2} = \dfrac{\chi^2}{\nu}$,

$$F = \frac{s_1^2 \,/\, \sigma_1^2}{s_2^2 \,/\, \sigma_2^2}\,; \quad \text{és ha } \sigma_1^2 = \sigma_2^2\,, \tag{2.19}$$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}\,. \tag{2.20}$$

Vagyis azonos varianciájú normális eloszlású sokaságokból vett minták tapasztalati szórásnégyzeteinek hányadosa *F*-eloszlású (2-8. ábra).

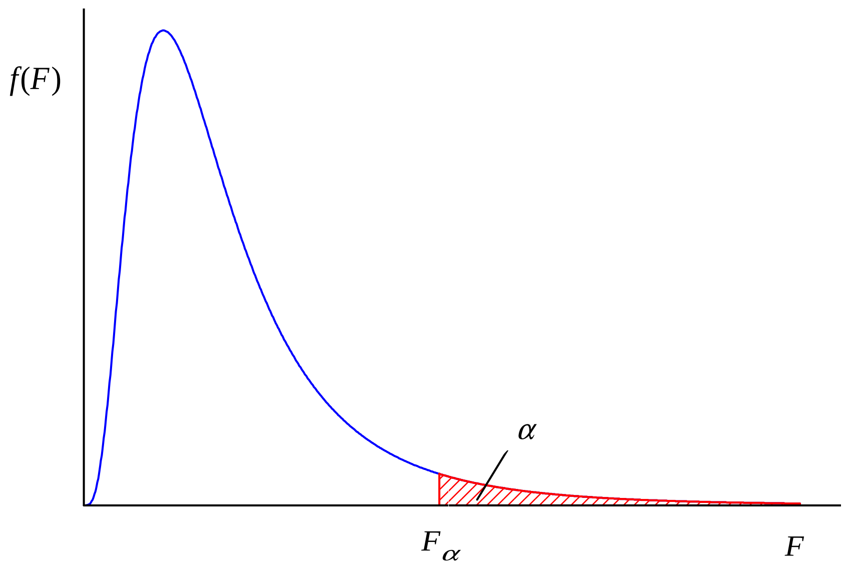


2-8. ábra. Az *F*-eloszlás sűrűségfüggvénye

Takarékosabb táblázatot készíthetünk, ha csak a fölső határt adjuk meg, az alsót ugyanezen táblázatból kis számolással kapjuk.

Legyen $F_\alpha(\nu_1,\nu_2)$ a ν_1 és ν_2 szabadsági fokokkal jellemzett *F*-eloszlású valószínűségi változónak az a kritikus értéke, amelyet az csak α valószínűséggel halad meg. Erre a következő egyenlőség érvényes:

$$F_\alpha(\nu_1,\nu_2)=\frac{1}{F_{1-\alpha}(\nu_2,\nu_1)}\,. \tag{2.21}$$



2-9. ábra. Az *F*-eloszlás kritikus értékei

2-4. példa

Azonos módszerrel két mérési sorozatot kaptunk, amelyek 4 ill. 7 mérésből állnak. Milyen intervallumban lehet a két minta szórásnégyzetének aránya 90 % valószínűséggel?

Minthogy azonos módszerről van szó, a variancia változatlan: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

$$P\left(F_{\text{alsó}} < s_1^2 / s_2^2 \le F_{\text{fölsõ}}\right) = 0.90$$

A Függelék IV. táblázatából

$$F_{\text{fölsõ}} = F_{0.05}(3,\ 6) = 4.76;$$

$$F_{\text{alsó}} = F_{0.95}(3,\ 6) = \frac{1}{F_{0.05}(6,\ 3)} = \frac{1}{8.94} = 0.112.$$

Az eredmény: a két szórásnégyzet aránya a (0.112; 4.76) intervallumba esik 90% valószínűséggel (2-9. ábra). Látható, hogy két minta szórásnégyzete nagyon különböző lehet akkor is, ha a mögöttük álló sokaság varianciája azonos.

2.2. Hipotézisvizsgálat, statisztikai próbák

A matematikai statisztikában a célunk a sokaság megismerése (paramétereinek meghatározása). Ennek során gyakran úgy járunk el, hogy az alapsokaságra valamilyen feltevéssel élünk (pl. μ és/vagy σ értéke) és ezt statisztikai próbával ellenőrizzük. Azt ellenőrizzük a tételből ill. folyamatból vett minták elemzésével, hogy a tétel vagy folyamat olyan eloszlású-e ill. olyan paraméterekkel jellemezhető, mint azt feltételezzük. Például megvizsgáljuk, hogy vízminta nitrát-tartalma nem haladja-e meg a megengedett értéket; a selejtarány nem nőtt-e meg stb. A próbák gondolatmenete lényegében mindig ugyanaz, ezért azt az *u*-próba ismertetésénél mutatjuk be részletesen.

2.2.1. *u*-próba

Tegyük fel, hogy egy normális eloszlású sokaság σ^2 varianciájának számszerű értéke korábbi vizsgálat alapján rendelkezésünkre áll. Ellenőrizni akarunk egy, a sokaság μ várható értékére vonatkozó hipotézist, azaz azt, hogy μ egy meghatározott számmal, μ_0-lal egyenlő-e (pl. hogy a gyártott alkatrészek méretingadozásának centruma a névleges érték-e). Ezt tekintjük nullhipotézisnek:

$$H_0 : \mu = \mu_0.$$

Lehetséges ellenhipotézisek többek között:

$$H_1 : \mu \ne \mu_0, \text{ vagy } H_1 : \mu < \mu_0, \text{vagy } H_1 : \mu > \mu_0, \text{ vagy } H_1 : \mu = \mu_1.$$

Legyen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ egy, a sokaságból vett n elemű minta. (Mindaddig, amíg a konkrét méréseket el nem végezzük, a mintaelemek nem számszerű értékek, hanem valószínűségi változók.)

1. Az u-próba menete a következő: A minta elemeinek számtani középértékéből kiszámítjuk a próbastatisztikát:

$$u_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} .$$

   Az u_0 próbastatisztika kifejezése nem azonos az $N(0, 1)$ eloszlású u standardizált normális eloszlású valószínűségi változóéval (mert μ helyett μ_0 szerepel benne), csak akkor, ha $\mu = \mu_0$, vagyis ha a H_0 nullhipotézis igaz. Általános esetben a következő kifejezés első tagja a definíció szerint u eloszlású, a második tag pedig attól eltérést okoz:

$$u_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} .$$

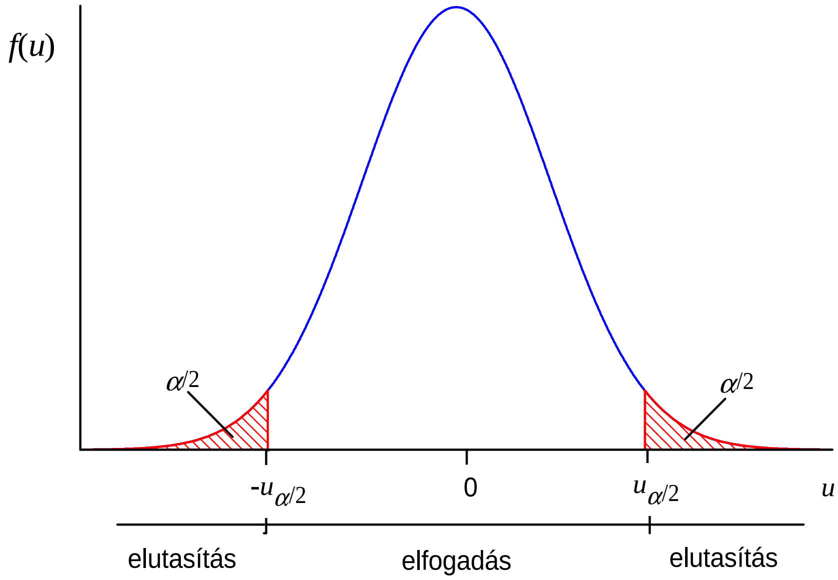
2. Az u-eloszlás táblázata segítségével kiszámítjuk, hogy az u_0 próbastatisztika nagy (pl. $1 - \alpha = 0.95$) valószínűséggel milyen intervallumba esik, ha a H_0 igaz (vagyis az u_0 föntebbi kifejezésének második tagja zérus), ez lesz az elfogadási tartomány. Úgynevezett kétoldali ellenhipotézis, $H_1\!: \mu \neq \mu_0$ esetén ez a tartomány:

$$P\left(-u_{a/2} < \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \leq u_{a/2} \right) = P\left(\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| \leq u_{a/2} \right) = 1 - \alpha .$$

3. Megvizsgáljuk, hogy a próbastatisztika kiszámított értéke az elfogadási tartományban van-e. Ha a H_0 nullhipotézis igaz, akkor u_0 nagy (pl. $1 - \alpha = 0.95$) valószínűséggel az elfogadási tartományban $\left(-u_{a/2}, u_{a/2}\right)$ van (kritikus érték: $u_{\alpha/2}$), és csak kis (pl. $\alpha = 0.05$) valószínűséggel esik azon kívülre, az ún. elutasítási tartományba (l. a 2-10. ábrán).

4. Ha u_0 számított értékét az $(1 - \alpha)$ valószínűséghez tartozó elfogadási tartományon belül találjuk, akkor a H_0 nullhipotézist elfogadjuk, míg ha a próbastatisztika értéke az intervallumon kívül esik, az elutasítási tartományba, akkor elutasítjuk. Ez a döntés.

Az elfogadási tartomány az a tartomány, amelyben a próbastatisztika értékeit $1 - \alpha$ valószínűséggel fölveszi, amennyiben a H_0 nullhipotézis igaz. Másképpen az a tartomány, amelyben az u_0 próbastatisztika értékei a véletlenszerű ingadozás következtében $1 - \alpha$ valószínűséggel lehetnek. Vegyük észre, hogy a vizsgálat lényege az u_0 próbastatisztika kifejezése számlálójában lévő különbség és a nevezőben szereplő ingadozás összehasonlítása. Ha az $\bar{x}$ és μ_0 eltérése lényegesen meghaladja azt a mértéket, ami még a véletlen ingadozással magyarázható, az eltérést szignifikánsnak (jelentősnek) nevezzük.



2-10. ábra. A nullhipotézis elfogadási tartománya

Az α valószínűséget a statisztikai próba szignifikanciaszintjének nevezzük. A hipotézisvizsgálat szignifikanciaszintjét az eredménnyel együtt mindig meg kell adnunk, ugyanis az eltérés lehet szignifikáns 0.05-os szinten, de esetleg nem szignifikáns 0.01-os szinten.

2-5. példa

Táramérlegen négy ismételt tömegméréssel határoztuk meg egy tárgy tömegét. A 4 mérésből álló minta számtani középértéke $\bar{x} = 5.0125$ g. Korábbi mérésekből tudjuk, hogy a mérés varianciája $\sigma^2 = 10^{-4}$ g^2 . El kell döntenünk, hihető-e, hogy a várható érték (a tárgy valódi tömege) 5.0000 g.

$H_0 : \mu = \mu_0 = 5.0000$ g, $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (kétoldali ellenhipotézis).

A hipotéziseket *u*-próbával vizsgáljuk. A próbastatisztika aktuális értéke:

$$u_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{5.0125 - 5.0000}{10^{-4}/2} = 2.5 .$$

1 – α =0.95 valószínűséget választva, a Függelék I. táblázata szerint $u_{\alpha/2}$ = 1.96. Az elfogadási tartomány: (-1.96; 1.96), a próbastatisztika aktuális értéke (2.5) ezen kívül van, így a H_0 hipotézist 0.05-os szignifikanciaszinten elvetjük (az adatok ellentmondanak annak, hogy a várható érték 5,0000 g). Mivel kétoldali ellenhipotézist használtunk, az elutasítási tartomány is két részből áll (l. a 2-10. ábrát), mindegyikhez külön-külön $\alpha/2$ valószínűség tartozik.

Az elfogadási tartományt $\bar{x}$ -ra is megadhatjuk:

$$P\left(\mu_0 - u_{\alpha/2}\,\sigma\big/\sqrt{n} < \bar{x} < \mu_0 + u_{\alpha/2}\,\sigma\big/\sqrt{n}\right) = 1-\alpha\,.$$

Behelyettesítve:

$$P\left(5.0000 - 1.96\cdot 0.01\big/\sqrt{4} < \bar{x} < 5.0000 + 1.96\cdot 0.01\big/\sqrt{4}\right) = P\left(4.99 < \bar{x} < 5.01\right) = 0.95\,.$$

2-6. példa

Egy bizonyos vegyszer 1 kg-jában legföljebb 5.0000 g idegen anyag lehet. Négy elemzés eredményének átlaga 5.0125 g. Korábbi mérésekből tudjuk, hogy a meghatározás varianciája σ^2 = 10^{-4} g^2. Eldöntendő, hihető-e, hogy az elemzési eredmények várható értéke (az igazi idegenanyag-tartalom) nem haladja meg az 5 g-os határt. Legyen itt is az α valószínűség 0.05! A hipotézisek ekkor:

$$H_0\!:\mu \le \mu_0 = 5.0000\text{ g}\,,$$

$$H_1\!:\mu > \mu_0 \qquad \text{(jobb oldali ellenhipotézis).}$$

$$u_0 = \frac{5.0125 - 5.0000}{0.01/\sqrt{4}} = 2.5$$

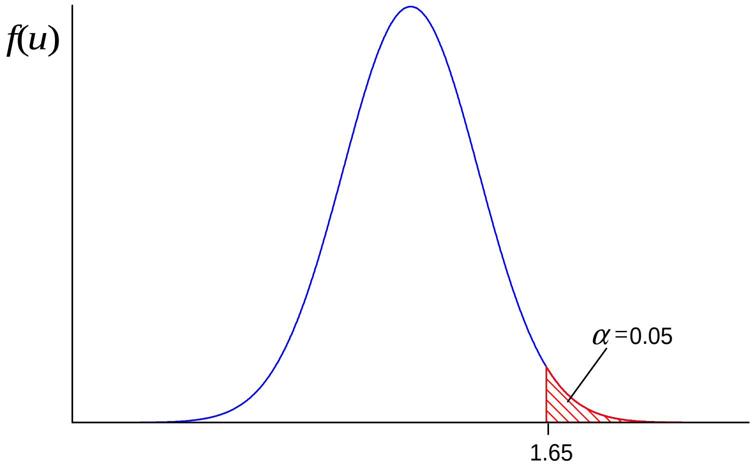
Bontsuk az u_0 próbastatisztika kifejezést egy biztosan u eloszlású és egy az attól való eltérést képviselő részre:

$$u_0 = \frac{5.0125 - E(\bar{x})}{0.005} + \frac{E(\bar{x}) - 5.0000}{0.005}$$

A próbastatisztika kifejezésének második tagja a nullhipotézis érvényessége esetén zérus vagy negatív, az ellenhipotézis szerint pozitív. Ez azt jelenti, hogy u_0 eloszlása H_1 igazsága esetén jobbra van eltolva az u-eloszláshoz képest (2-11. ábra). A nullhipotézist akkor utasítjuk el (az ellenhipotézist akkor fogadjuk el), ha az u_0 próbastatisztika aktuális értéke annyira nagy (jobbra eltolt), hogy azt a véletlen csak α valószínűséggel okozhatná, vagyis

$$P\left(u_0 > u_\alpha \middle| H_0\right) = \alpha\,.$$

Az u_α kritikus érték α =0.05-hoz 1.65, u_0 ennél nagyobb, tehát elvetjük a nullhipotézist. Egyoldali ellenhipotézis esetén csak egyetlen elutasítási tartomány van, itt: (u_α ; ∞).



2-11. ábra. A jobb oldali ellenhipotézis

Nyilvánvalóan minél jobban meghaladja a próbastatisztika aktuális értéke a táblázatból adott α szignifikanciaszinthez vett kritikus értéket, annál jelentősebb az eltérés, annál biztosabbak lehetünk a nullhipotézist elutasító döntésünkben. Az is igaz, hogy minél jelentősebb az eltérés, annál kisebb α-szinten fogadnánk el a nullhipotézist.

2-7. példa

Elfogadnánk-e a nullhipotézist a kétoldali alternatívával szemben, ha a 2-5. példában α-ra 0.05 helyett 0.01-ot, 0.005-et, 0.001-et választanánk?

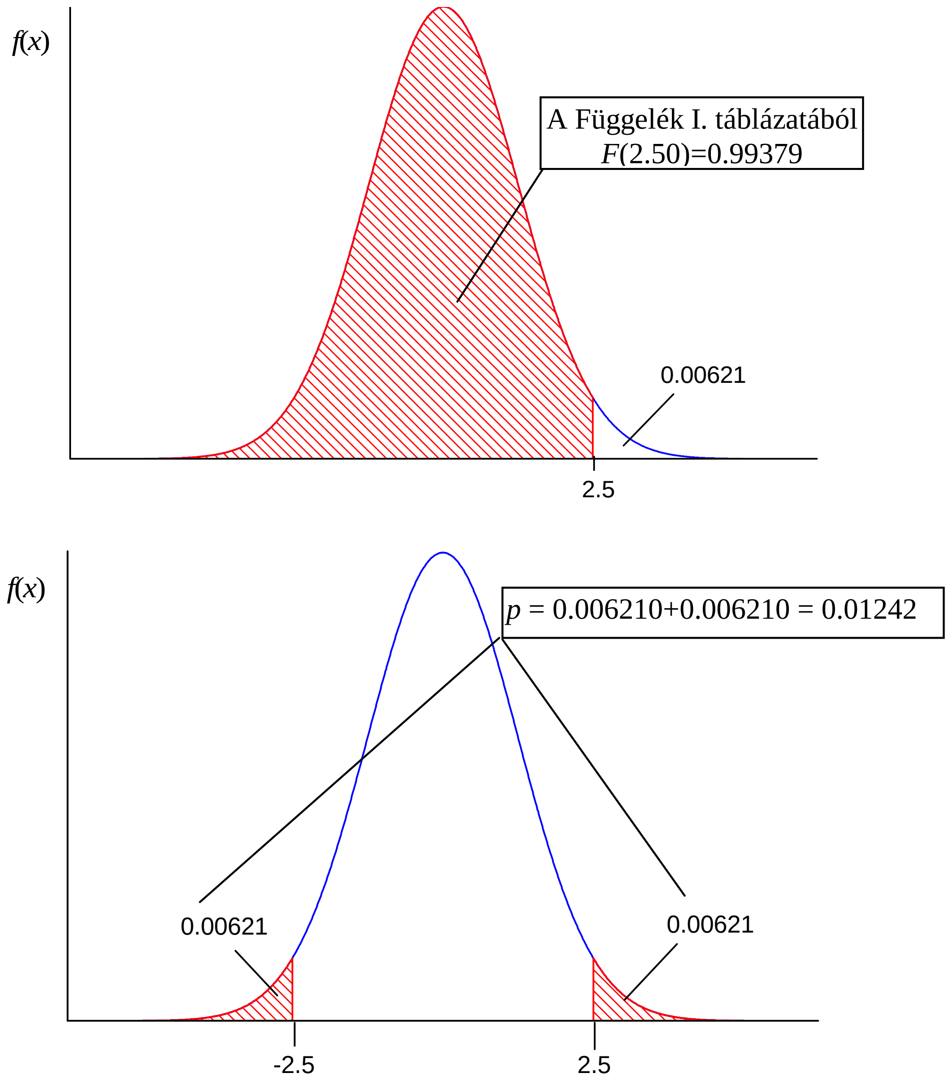
A kritikus értékek a Függelék I. táblázatából:

α	$u_{\alpha/2}$
0.05	1.96
0.01	2.58
0.005	2.81
0.001	3.29

Eszerint már α=0.01-es szinten elfogadnánk nullhipotézist.

Számítsuk ki, hogy mi lenne az az α szignifikanciaszint, amelynél még éppen elfogadnánk a nullhipotézist, vagyis milyen α-hoz tartozó kétoldali kritikus értékkel egyezik meg u_0 aktuális értéke (u_0 = 2.50)!

Ezt a valószínűséget p-vel szokás jelölni, és nagysága a Függelék I. táblázata szerint 0.00621 (2-12. ábra).



2-11. ábra. A p valószínűség szemléltetése a 2-7. példához

A p az a valószínűség, amellyel a próbastatisztika a talált vagy azon is túl lévő értéket vesz föl, amennyiben H_0 igaz, vagyis pusztán a véletlen ingadozásnak tulajdoníthatóan: Minél kisebb ez a p érték, annál kisebb a valószínűsége, hogy u_0 a véletlen műveként vegyen föl legalább akkora értéket, amekkorát találtunk. Vagyis minél kisebb p valószínűség tartozik a próbastatisztika talált értékéhez, annál biztosabbak lehetünk benne, hogy az nem a véletlen következménye, hanem valóságos eltérésé.

A p érték meghatározása táblázatokból nehézkes, de a számítógépes statisztikai programok könnyedén kiszámítják.

2.2.2. Első- és másodfajú hiba

Minden statisztikai próbánál kétféle hibát követhetünk el: elvetjük a nullhipotézist, holott igaz, ill. elfogadjuk a hipotézist, pedig az nem igaz. Ezeket első-, ill. másodfajú hibáknak nevezzük.

A H_0 nullhipotézis	Döntés: A H_0 hipotézist	
	elfogadjuk	elutasítjuk
igaz	Helyes döntés	Elsőfajú hiba
nem igaz	Másodfajú hiba	Helyes döntés

Annak valószínűsége, hogy elsőfajú hibát követünk el, éppen α, ugyanis α annak valószínűsége, hogy H_0 fennállása esetén a próbastatisztika az elutasítási tartományba essék.

A másodfajú hiba valószínűségét egy olyan H_1 alternatív hipotézisre szokás megadni, amely a H_0 nullhipotézistől a feladat megszabta műszaki szempontból már észrevehetően különböző állítást tartalmaz.

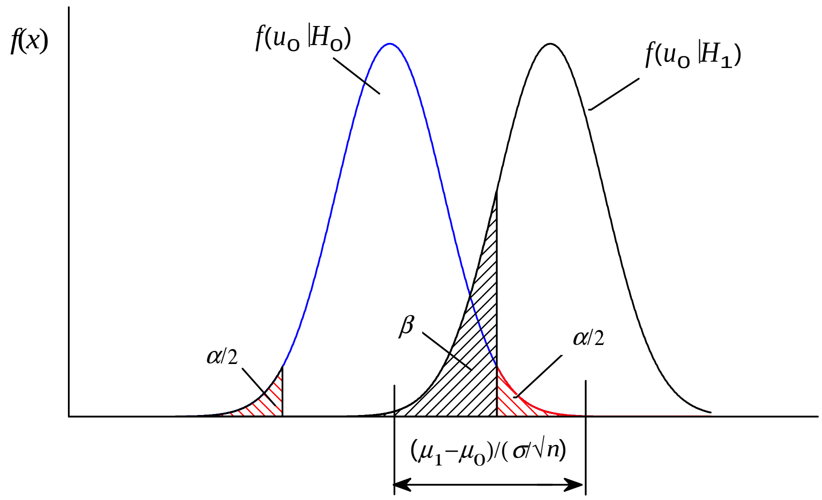
Legyen ez az alternatív hipotézis:

$$H_1 : \mu = \mu_1 .$$

Amennyiben a H_0 hipotézis helyett H_1 az igaz, az u_0 próbastatisztika sűrűségfüggvénye az u-eloszláséhoz képest a $\mu_1 - \mu_0$ különbség nagyságától függő mértékben el van tolva:

$$u_0 = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\overline{x} - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

A 2-13. ábrán az u_0 próbastatisztika sűrűségfüggvénye látható abban az esetben, ha a H_0 igaz ($\mu = \mu_0$), ill. ha H_1 az igaz ($\mu = \mu_1$). Az elfogadási tartományt a nullhipotézis érvényességét feltételezve jelöljük ki, hiszen éppen a H_0 elfogadási tartományáról van szó.



2-13. ábra. A másodfajú hiba valószínűsége

Látható, hogy a másodfajú hiba β valószínűsége annál kisebb, minél távolabb van μ_0 a μ_1-től (vagyis nagyobb másodfajú hiba elkövetésének kisebb a valószínűsége). Ez azt jelenti, hogy minél nagyobb az eltérés, annál kisebb a valószínűsége, hogy észrevétlen maradjon. A β nagysága függ a próbastatisztika varianciájától (a görbe szélességétől) is, tehát a minta elemszámának növelésével tetszőlegesen csökkenthető. Az is látható, hogy ha az elsőfajú hiba megengedett α valószínűségét csökkentjük, ezzel a másodfajú hiba valószínűségét növeljük!

2-8. példa

Tegyük föl, hogy a 2-5. példában a valóságos várható érték $H_1 : \mu = \mu_1 = 5.01$ g ; számítsuk ki a másodfajú hiba β valószínűségét arra az esetre, amelynél a $H_0 : \mu = \mu_0 = 5.0000$ g nullhipotézist elfogadtuk az α=0.01 szinten!

($\bar{x} = 5.0125$ g, $\sigma^2 = 10^{-4}$ g^2, n=4, az u_0 próbastatisztika aktuális értéke 2.5, $u_{\alpha/2}$=2.58)

A másodfajú hiba valószínűsége annak valószínűsége, hogy a próbastatisztika az elfogadási tartományba essék, pedig az ellenhipotézis az igaz:

$$\beta = P\left(-u_{\alpha/2} < u_0 < u_{\alpha/2} \middle| H_1\right).$$

H_1 érvényessége esetén u_0 nem u-eloszlású, hanem a következő helyettesítés szerinti első tag az:

$$\beta = P\left(-u_{\alpha/2} < \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{\alpha/2} \middle| \mu = \mu_1\right) =$$

$$= P\left(-u_{\alpha/2} - \frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < u < u_{\alpha/2} - \frac{\mu_1-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

Számszerűen:

$$\beta = P\left(-2.58 - \frac{0.01}{0.01/\sqrt{4}} < u < 2.58 - \frac{0.01}{0.01/\sqrt{4}}\right) =$$

$$= P(-4.58 < u < 0.58) = 0.7104 .$$

Tehát ha a próbastatisztika kiszámított értéke kívül van a Függelék I. táblázatából α = 0.01 szinthez vehető kritikus értékek meghatározta elfogadási tartományon, a nullhipotézist elutasítjuk. Itt az α annak valószínűsége, hogy elutasítsuk a nullhipotézist, pedig igaz: α értékét elég kicsire választva ezt a kockázatot tetszőlegesen csökkenthetjük. Így elég valószínű lesz, hogy csak akkor utasítjuk el a nullhipotézist, ha nem igaz.

Ha az eltérést nem találjuk szignifikánsnak (az elfogadási tartományon belül van a próbastatisztika értéke, ezért elfogadjuk a nullhipotézist), nem lehetünk biztosak abban, hogy a nullhipotézis igaz. Csak azt mondhatjuk, hogy a rendelkezésre álló információ nem elegendő a nullhipotézis elutasításához. A valóságban a nullhipotézistől elég nagy is lehet ilyenkor az eltérés. Ennek kockázatát éppen a másodfajú hiba valószínűsége fejezi ki. Minél kisebb a minta információtartalma (kis elemszám, nagy szórás), annál nagyobb a valószínűsége, hogy elfogadjuk a nullhipotézist, ha az nem igaz.

2-9. példa

Legyen egy 4 elemű minta átlaga $\bar{x} = 5.006$, az ingadozás varianciája σ^2 = 10^{-4}. Az u_0 próbastatisztika aktuális értéke:

$$u_0 = \frac{5.006 - 5.000}{10^{-2} / \sqrt{4}} = 1.2 .$$

A táblázat mutatja három hipotézispár esetére az elfogadási tartományokat α = 0.05 szinthez:

H_0	H_1	elfogadási tartomány	döntés
$\mu = \mu_0 = 5.0000$	$\mu \neq \mu_0$	$-1.96 < u_0 \le 1.96$	elfogadjuk
$\mu \le \mu_0 = 5.0000$	$\mu > \mu_0$	$u_0 \le 1.65$	elfogadjuk
$\mu \ge \mu_0 = 5.0000$	$\mu < \mu_0$	$-1.65 < u_0$	elfogadjuk

Vagyis mindhárom, egymásnak részben ellentmondó nullhipotézist elfogadjuk. A helyes következtetés nyilvánvalóan nem az, hogy mindhárom igaz, hanem az, hogy a minta egyiknek sem mond ellent. Ha az eltérés μ_0-tól nagyobb, pl. $\bar{x} = 5.0125$, akkor csak a harmadik nullhipotézist ($\mu \ge \mu_0 = 5.0000$) fogadjuk el.

A másodfajú hiba β valószínűsége csak egy adott ellenhipotézishez ($H_1 : \mu = \mu_1$) számítható ki, és β éppen annak valószínűsége, hogy a μ_1–μ_0 különbséget nem veszszük észre.

Ha nem egy ellenhipotézis ($\mu = \mu_1$) jöhet szóba, hanem az alternatívák folyamatos sorozata (pl. $\mu > \mu_0$), azaz az ellenhipotézis összetett hipotézis, akkor a másodfajú hiba β valószínűsége függvény, amelynek maximuma a $\mu_1 = \mu_0$ helyen van, ezt a próba erőfüggvényének nevezik. A β értéket, vagyis a nullhipotézis elfogadási valószínűségét szokás a $\mu_1 - \mu_0$ különbség függvényében ábrázolni, ezt nevezik a próba működési jelleggörbéjének (Operating Characteristic: OC-görbe).

2-10. példa

Legyen $\mu_0 = 5.0000$, $\sigma^2 = 10^{-4}$, n=4, $\alpha = 0.05$. Ekkor az elfogadási tartomány:

$$-1.96 < u_0 \leq 1.96 .$$

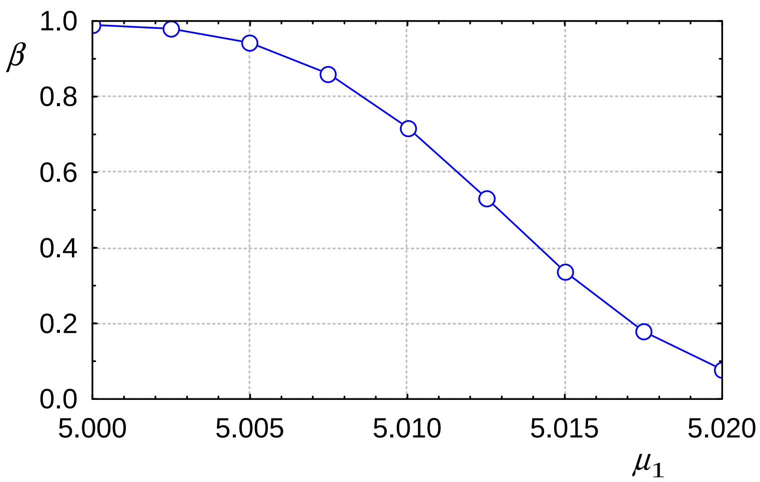
Számítsuk ki a másodfajú hiba elkövetésének β valószínűségét különböző μ_1 ellenhipotézis szerinti várható értékekhez!

$$\beta = P\left(u < u_{\alpha/2} - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right) - P\left(-u_{\alpha/2} - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < u\right)$$

A képletben szereplő két valószínűséget és β nagyságát különböző μ_1 értékekhez a következő táblázat mutatja:

μ_1	μ_1-μ_0	$P\left(u < u_{\alpha/2} - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right)$	$P\left(-u_{\alpha/2} - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < u\right)$	β
5.000	0	0.995	0.005	0.990
5.005	0.005	0.94295	≈0	0.943
5.010	0.010	0.71904	≈0	0.719
5.015	0.015	0.33724	≈0	0.337
5.020	0.020	0.07780	≈0	0.078

Tehát ha pl. a μ_1–μ_0 különbség 0.01, 0.719 annak valószínűsége, hogy az eltérést nem vesszük észre, és a $\mu = \mu_0 = 5.0000$ nullhipotézist hisszük igaznak.



2-14. ábra. OC-görbe a 2-10. példához

Jelölje Δ azt a különbséget, amelyet már műszaki szempontból jelentősnek tartunk, és ezért nagy biztonsággal ki akarunk mutatni: $\Delta = \mu_1 - \mu_0$. Célszerű ehhez az eltéréshez kiszámítani a másodfajú hiba valószínűségét, vagyis annak esélyét, hogy egy Δ nagyságú eltérést a nullhipotézistől nem veszünk észre. Láttuk, hogy az elsőfajú hiba adott α valószínűsége esetén a másodfajú hiba β valószínűsége az alternatív hipotézistől (a $\mu_1 - \mu_0$ különbségtől), valamint a sűrűségfüggvény szélességétől függ, mely utóbbi a mérések varianciájából és az ismétlések számából adódik (σ^2/n).

Ha megadjuk σ, Δ, α és β értékeit, kiszámíthatjuk az elvégzendő mérések számát. A számítás menetét vizsgáljuk meg egy mintavételi példán, amely a normális eloszlásra épül (u-próba).

Ha a nullhipotézist elfogadjuk, nem kell aggódni az elsőfajú hiba miatt; ha a nullhipotézist elutasítottuk, nem kell kérdezni a másodfajú hiba valószínűségét.

2-11. példa (Hald, 1965 nyomán)

Egy anyag minősége egyértelműen jellemezhető a sűrűségével, melynek kívánatos értéke kisebb, mint 1.54. A gyártás során szerzett eddigi ismeretek szerint a mérés pontosságára jellemző variancia négyzetgyöke $\sigma = 0.03$. A vizsgálat menete a következő: n-szer mintát veszünk a minősítendő legyártott tételből, mindegyik minta sűrűségét megmérjük, átlagoljuk: az így kapott átlagos sűrűség $\bar{x}$. Ha $\bar{x}$ meghalad egy bizonyos $\bar{x}^*$ értéket, az adagot rossznak, ha $\bar{x} < \bar{x}^*$, jónak minősítjük. Hogy a jó tételt majdnem mindig elfogadjuk, a rosszakat majdnem mindig elutasítsuk, a következő kívánalmakat adjuk meg:

a) ha $\mu \leq 1.50$, 99 % legyen a valószínűsége, hogy jónak minősítsük,

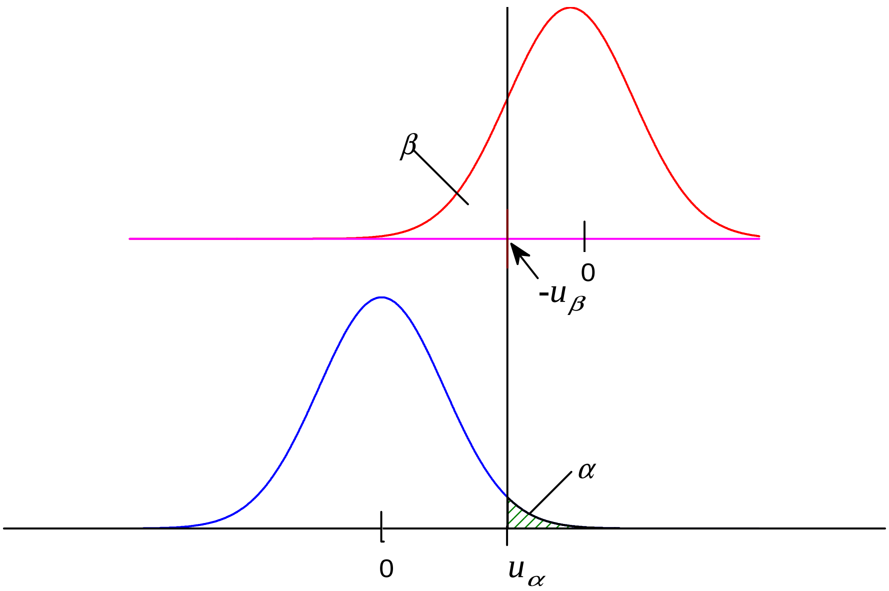
b) ha $\mu \geq 1.54$, 98 % legyen a valószínűsége, hogy rossznak minősítsük az adagot.

A nullhipotézist és az ellenhipotézist a következőképpen fogalmazhatjuk meg:

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 = 1.50 \text{ (a tétel jó);}$$

$$H_1 : \mu \geq \mu_1 = 1.54 \text{ (a tétel rossz).}$$

Az elsőfajú hiba megengedett valószínűsége $\alpha = 0.01$, a másodfajú hibáé $\beta = 0.02$. A kimutatandó, jelentősnek minősítendő különbség: $\Delta = 0.04$.
A feladat: határozzuk meg a veendő minták n számát és az $\bar{x}^*$ határértéket.



2-15. ábra. Kritikus értékek az első- és másodfajú hibához

Fejezzük ki azt az $\bar{x}^*$ határt, amelyet $\bar{x}$ $1-\alpha$ valószínűséggel nem halad meg, ha H_0 igaz (2-15. ábra alsó része):

$$P\left(u_0 \le u_\alpha \middle| H_0\right) = P\left(\bar{x} \le \mu_0 + u_\alpha \sigma \big/ \sqrt{n}\right) = P\left(\bar{x} \le \bar{x}^* \middle| H_0\right) = 1 - \alpha\,.$$

Másodfajú hibát akkor követünk el, ha H_1 az igaz ($\mu \ge \mu_1 = 1.54$), de mivel $u_0 \le u_\alpha$, elfogadjuk a H_0 hipotézist (hogy $\mu \le \mu_0 = 1.50$). Ennek valószínűsége:

$$\beta = P\left(u_0 \le u_\alpha \middle| H_1\right) = P\left(\bar{x} \le \bar{x}^* \middle| H_1\right) = P\left(\frac{\bar{x} - \mu_1}{\sigma \big/ \sqrt{n}} \le \frac{\bar{x}^* - \mu_1}{\sigma \big/ \sqrt{n}}\right).$$

Ha a H_1 ellenhipotézis igaz, az $\dfrac{\bar{x} - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}}$ valószínűségi változónak van u-eloszlása, amely az alsó ($-u_\beta$) kritikus értéket β valószínűséggel haladja meg lefelé (2-14. ábra fölső része). Tehát

$$\beta = P\left(\frac{\bar{x} - \mu_1}{\sigma / \sqrt{n}} \le -u_\beta\right).$$

A β két kifejezésében szereplő határt egyenlővé téve:

$$-u_\beta = \frac{\bar{x}^* - \mu_1}{\sigma \big/ \sqrt{n}} = \frac{\mu_0 + u_\alpha \sigma \big/ \sqrt{n} - \mu_1}{\sigma \big/ \sqrt{n}} = u_\alpha - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma \big/ \sqrt{n}}\,.$$

Ebből a kimutatandó különbség: $\mu_1 - \mu_0 = (u_\alpha + u_\beta)\sigma \big/ \sqrt{n} = \Delta$,

vagyis $$n = \left(u_\alpha + u_\beta\right)^2 \sigma^2 \big/ \Delta^2\,.$$

Esetünkre a Függelék I. táblázatából $u_\alpha = 2.326$, $u_\beta = 2.054$, így

$n = 10.8$ és $\bar{x}^* = 1.521$.

Ez azt jelenti, hogy minden adagból 11 elemű mintát kell venni és akkor fogadható el a tétel, ha a sűrűségek átlagértéke 1.521-nél kisebb.

2.2.3. χ^2 -próba a variancia vizsgálatára

A próba normális eloszlású sokaság ismeretlen σ^2 varianciájára vonatkozó nullhipotézis ellenőrzésére szolgál. Tételezzük fel, hogy egy normális eloszlású sokaságból n elemű mintát veszünk. A minta szórásnégyzete (s^2) segítségével vizsgáljuk meg, hogy a sokaság varianciája megegyezik-e a σ_0^2 értékkel:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2\,.$$

Az ellenhipotézis legyen az, hogy a variancia nagyobb, mint σ_0^2:

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2\,.$$

A nullhipotézist eszerint pontosítva: $H_0 : \sigma^2 \le \sigma_0^2$.