HIPOTÉZISVIZSGÁLATOK, STATISZTIKAI PRÓBÁK

A sokaságot szeretnénk megismerni, de csak a minta áll rendelkezésünkre.

Az alapsokaságra vonatkozóan valamilyen feltevéssel élünk (pl. μ és/vagy σ értéke) és azt statisztikai próbával ellenőrizzük.

Jöhetnek-e az adatok olyan eloszlásból …? Pl.: $\mu = \mu_0$

$H_0 : \mu = \mu_0$ nullhipotézis

$H_1 : \mu \neq \mu_0$ ellenhipotézis

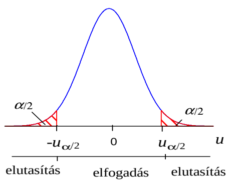
u-próba

$H_0 : \mu = \mu_0$ $\qquad$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \longrightarrow u_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$ próbastatisztika

Ha H_0 igaz, $u_0 \sim u$

Ha u_0 olyan értékeket vesz föl, amilyeneket u szokott, elfogadjuk



$$P(-u_{\alpha/2} < u_0 \le u_{\alpha/2} | \mathrm{H}_0) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-u_{\alpha/2} < \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le u_{\alpha/2} \middle| \mathrm{H}_0\right) = 1 - \alpha$$

$$\mu_0 - u_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} < \bar{x} < \mu_0 + u_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$$

$$\bar{x} - u_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} < \mu_0 < \bar{x} + u_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$$

a konfidencia-intervallum tartalmazza a μ_0 értéket

u-próba

- kiszámítjuk a próbastatisztika aktuális értékét:

$$u_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

u-eloszlású

értéke 0, ha H_0 igaz

$H_0 : \mu = \mu_0$

$H_1 : \mu \neq \mu_0$, vagy $H_1 : \mu < \mu_0$, vagy $H_1 : \mu > \mu_0$.

- kijelöljük az elfogadási tartományt az előírt α szignifikanciaszinthez

Pl. $H_1 : \mu \neq \mu_0$ esetén

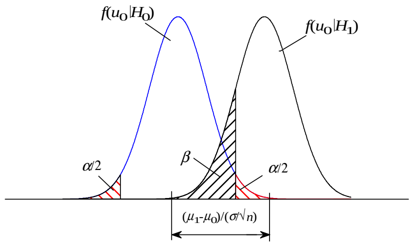
$$P\left(-u_{\alpha/2} < \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \le u_{\alpha/2}\right) = P\left(\left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le u_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

- megvizsgáljuk, hogy a próbastatisztika kiszámított értéke az elfogadási tartományban van-e
- ha igen, elfogadjuk a nullhipotézist

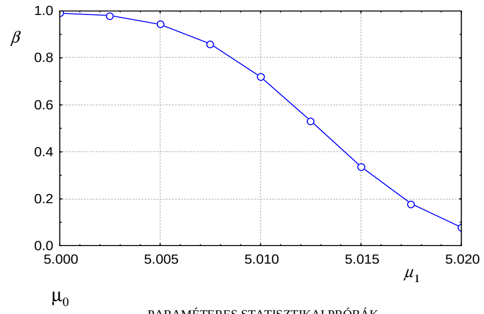
Első- és másodfajú hiba

<table>
<tr><td rowspan="3">nullhipotézis</td><td colspan="2">döntés</td></tr>
<tr><td colspan="2">a H_0 hipotézist</td></tr>
<tr><td>elfogadjuk</td><td>elutasítjuk</td></tr>
<tr><td>H_0 igaz</td><td>helyes döntés</td><td>elsőfajú hiba (α)</td></tr>
<tr><td>H_0 nem igaz</td><td>másodfajú hiba (β)</td><td>helyes döntés</td></tr>
</table>

A másodfajú hiba valószínűsége



Működési jelleggörbe (OC-görbe)



7. példa

Táramérlegen négy ismételt tömegméréssel határoztuk meg egy tárgy tömegét. A 4 mérésből álló minta számtani középértéke 5.0125 g. Korábbi mérésekből tudjuk, hogy a mérés varianciája $\sigma^2 = 10^{-4}$ g^2 . El kell döntenünk, hihető-e, hogy a várható érték (a tárgy valódi tömege) 5.0000 g.

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 5.0000, \quad \mathrm{H}_1 : \mu \neq 5.0000$$

$$\bar{x} = 5.0125\ , \quad \sigma^2 = 10^{-4}, \quad n = 4, \quad \alpha = 0.05$$

$$u_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{5.0125 - 5.0000}{10^{-4}/2} = 2.5$$

$$u_{\alpha/2} = 1.96$$

Az elfogadási tartomány: (-1.96; 1.96), a próbastatisztika aktuális értéke (2.5) ezen kívül van, így a H_0 hipotézist 0.05-os szignifikanciaszinten elvetjük.

Egymintás *t*-próba

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} + \frac{\mu - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = t + \frac{\mu - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

$$P\left(-t_{\alpha/2} < \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

8. példa

Egy analitikai módszer torzítatlanságának vizsgálatára 5 ismételt mérést végeztek. Az eredmények: 3.25, 3.27, 3.24, 3.26 és 3.24. Elfogadva, hogy az adatok közelítőleg normális eloszlásúak, ellenőrizzük 5%-os szignifikanciaszinten a torzítatlanság hipotézisét!

$$\bar{x} = 3.252 \qquad s = 0.013038 \qquad n = 5$$

$$t_0 = \frac{3.252 - 3.25}{0.013038/\sqrt{5}} = 0.342997 \qquad t_{\alpha/2}(4) = 2.776$$

Statisztikai próba és konfidencia-intervallum

Kétoldali eset

Elfogadási tartomány:

$$-t_{\alpha/2} < t_0 < t_{\alpha/2} \qquad t_0 = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Átrendezve

$$-t_{\alpha/2}\, s/\sqrt{n} < \bar{x}-\mu_0 \le t_{\alpha/2}\, s/\sqrt{n}$$

$$\bar{x}-t_{\alpha/2}\, s/\sqrt{n} < \mu_0 \le \bar{x}+t_{\alpha/2}\, s/\sqrt{n}$$

A μ várható érték 1-α valószínűségű konfidencia-intervalluma

$$\bar{x}-t_{\alpha/2}\, s/\sqrt{n} < \mu \le \bar{x}+t_{\alpha/2}\, s/\sqrt{n}$$

$$\bar{x}-t_{\alpha/2}\, s/\sqrt{n} < \mu_0 \le \bar{x}+t_{\alpha/2}\, s/\sqrt{n}$$

Elfogadjuk a nullhipotézist ($\mu = \mu_0$), ha a konfidencia-intervallum tartalmazza a μ_0 feltételezett várható értéket.

χ^2 -próba a variancia vizsgálatára

$$H_0: \sigma^2 \le \sigma_0^2 \qquad H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

Ha H_0 igaz, akkor a következő kifejezés χ^2-eloszlású, szabadsági foka: $\nu = n-1$

$$\chi_0^2 = \frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2}, \qquad P\left(\frac{s^2(n-1)}{\sigma_0^2} \le \chi_\alpha^2\right) = 1-\alpha$$

9. példa

A 17. példa adatai alapján ellenőrizzük α=0.05-os szignifikanciaszinten, hogy elfogadható-e az az állítás, mely szerint a mérési módszer varianciája (σ^2) legfeljebb 10^{-4} (%)^2.

$s = 0.013038$

$s^2 = 1.700 \cdot 10^{-4}$

$$H_0: \sigma^2 \le 10^{-4}$$

$$H_1: \sigma^2 > 10^{-4}$$

$$\chi_0^2 = \frac{0.00017 \cdot 4}{10^{-4}} = 6.8$$

$$\chi_0^2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} \cdot \frac{0.00017 \cdot 4}{10^{-4}} = \frac{\sigma^2}{10^{-4}} \cdot \frac{0.00017 \cdot 4}{\sigma^2} = 6.8$$

χ^2

$\chi_{0.05}^2(4) = 9.488$, fölső határ

$\boxed{>1, \quad \text{ha} \quad H_1 \quad \text{igaz}}$

Két szórásnégyzet összehasonlítása (*F*-próba)

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

A próbastatisztika: $F_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2}; \quad (n_1-1, n_2-1)$

Egyik oldali ellenhipotézis esetén: $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Akkor utasítjuk el a nullhipotézist, ha

$$s_1^2 / s_2^2 > F_\alpha$$

Kétoldali ellenhipotézis esetén: $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Akkor utasítjuk el a nullhipotézist, ha

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{1-\alpha/2} \quad \textbf{vagy} \quad \frac{s_1^2}{s_2^2} < F_{\alpha/2}$$

$s_1^2 / s_2^2 \geq 1$ **elég az elfogadási tartomány fölső határát ellenőrizni**

95 %-os egyoldali szint = a 90 %-os kétoldali szintnek

Kétmintás *t*-próba

Adott a két független minta elemszáma (n_1 és n_2), és szórásnégyzetük (s_1^2 és s_2^2).

Tételezzük fel, hogy a két sokaság varianciája megegyezik. (Ezt *F*-próbával ellenőrizni kell!)

$d = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \qquad E(d) = \mu_1 - \mu_2$

$$Var(d) = Var(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) = \sigma^2 / n_1 + \sigma^2 / n_2$$

$$s_d^2 = s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)$$

$$s^2 = \frac{1}{n_1+n_2-2}\left[s_1^2(n_1-1) + s_2^2(n_2-1)\right]$$

A következő kifejezés *t*-eloszlású

$$t = \frac{d - E(d)}{s_d} = \frac{d - E(d)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad \nu = n_1 + n_2 - 2$$

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$, ekkor $E(d) = 0$

A próbastatisztika:

$$t_0 = \frac{d\text{-}0}{s_d} = \frac{d}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}, \quad \nu = (n_1 - 1) + (n_2 - 1)$$

A $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ feltevést *F*-próbával ellenőrizzük